

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

*Факультет математики и компьютерных наук*

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Многомерный комплексный анализ**

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета  
математики и компьютерных наук

Образовательная программа

**01.03.01–Математика**

Профиль подготовки

**Вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Уровень высшего образования:

**бакалавриат**

Форма обучения: **очная**

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП формируемую участниками  
образовательных отношений

Махачкала, 2022г

Рабочая программа дисциплины «Теория меры и интегралов» составлена в 2022 году соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата) от 10.01.2018 №8.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,  
Сиражудинов М.М., д. ф.-м.н., профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г.,  
протокол № 8

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и  
компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол №7.

Председатель  Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим  
управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Многомерный комплексный анализ» входит в часть ОПОП формируемую участниками образовательных отношений по направлению 01.03.01– Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа. Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с основными понятиями и методами многомерного комплексного анализа и их некоторыми приложениями.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных – ОПК-1, профессиональных – ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *2-х коллоквиумов (модулей)*, промежуточный контроль в форме *зачета.*

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семес тр	Учебные занятия							Форма промежуто чной аттестации (зачет, дифференц ированный зачет, экзамен)	
	Все го	в том числе							СРС
		Контактная работа обучающихся с преподавателем							
		из них							
Лек ции	Лаборат орные занятия	Практич еские занятия	КСР	консуль тации					
8	72	16		16			40	Зачет	

### 1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является изучение основных понятий и методов многомерного комплексного анализа, приобретение навыков решения задач в данной области.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата**

Дисциплина «Многомерный комплексный анализ» входит в вариативную часть образовательной программы *бакалавриата* по направлению *01.03.01–Математика* и является *дисциплиной по выбору*.

Курс «Многомерный комплексный анализ» преподается на 4 курсе факультета математики и компьютерных наук. Для его успешного изучения необходимы знания и умения, приобретённые в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, комплексный анализ, дифференциальная геометрия, алгебра.

Освоение дисциплины «Многомерный комплексный анализ» необходимо при написании выпускной квалификационной работы, а также последующем изучении дисциплин магистратуры, связанных с системами уравнений в частных производных. Этот раздел науки является необходимым для обучения в аспирантуре по специальностям «Дифференциальные уравнения», «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

## **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).**

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
-------------	-------------------------------------	---

ПК-1	<p>Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики,</p>	<p><b>Знает:</b> основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p><b>Умеет:</b> решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p><b>Владеет:</b> методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>
	<p>теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности</p>	
ПК-3	<p>Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</p>	<p><b>Знает:</b> основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p><b>Умеет:</b> решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p><b>Владеет:</b> методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часов.

#### 4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости и (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
<b>Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных</b>									
1	Голоморфные функции	8	1	4	4			10	Устный опрос
2	Голоморфные отображения	8	2-3	4	4			10	Тестирование
	<i>Итого по модулю 1</i>			<b>8</b>	<b>8</b>			<b>20</b>	<i>Коллоквиум</i>
<b>Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного</b>									

<b>анализа</b>									
1	Многообразия и формула Стокса	8	6-8	4	2			10	Устный опрос
2	Области голоморфности	8	8	4	4			10	Устный опрос
	<i>Итого по модулю 2</i>			<b>8</b>	<b>8</b>			<b>20</b>	<i>Контрольная работа</i>
	<b>ИТОГО</b>			<b>16</b>	<b>16</b>			<b>40</b>	

#### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

##### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### **Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных**

### *Тема 1. Голоморфные функции*

Пространство  $\mathbb{C}^n$ , простейшие области в нем. Голоморфные функции и их простейшие свойства. Многомерные условия Коши-Римана. Теорема Хартогса. Разложение голоморфных функций в степенные ряды, ряды Лорана и Хартогса.

### *Тема 2. Голоморфные отображения*

Голоморфные отображения и их свойства. Группы автоморфизмов простейших областей. Инвариантные метрики.

## ***Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного анализа***

### *Тема 3. Многообразия и формула Стокса*

Многообразия и формы. Цепи и их границы. Дифференцирование форм. Формула Стокса.

### *Тема 4. Области голоморфности.*

Определение области голоморфности в  $\mathbb{C}^n$ . Продолжение с помощью формулы Коши. Принцип максимума для аналитических дисков, продолжение с помощью дисков. Голоморфная выпуклость и область голоморфности (эквивалентность). Форма Леви вещественной гиперповерхности. Субгармонические и плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклость.

## ***4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине***

### ***Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных***

#### *Тема 1. Голоморфные функции*

Пространство  $\mathbb{C}^n$ , простейшие области в нем. Голоморфные функции и их простейшие свойства. Многомерные условия Коши -Римана. Теорема Хартогса. Разложение голоморфных функций в степенные ряды, ряды Лорана и Хартогса.

#### *Тема 2. Голоморфные отображения*

Голоморфные отображения и их свойства. Группы автоморфизмов простейших областей. Инвариантные метрики.

## ***Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного анализа***

### *Тема 3. Многообразия и формула Стокса*

Многообразия и формы. Цепи и их границы. Дифференцирование форм. Формула Стокса.

#### Тема 4. Области голоморфности.

Определение области голоморфности в  $\mathbb{C}^n$ . Продолжение с помощью формулы Коши. Принцип максимума для аналитических дисков, продолжение с помощью дисков. Голоморфная выпуклость и область голоморфности (эквивалентность). Форма Леви вещественной гиперповерхности. Субгармонические и плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклость.

### 5. Образовательные технологии

В соответствии с требованиями ФГОС при реализации различных видов учебной работы в процессе изучения дисциплины «Многомерный комплексный анализ» предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

- практические занятия в диалоговом режиме;
- компьютерное моделирование и практический анализ результатов;
- научные дискуссии;
- работа в малых группах по темам, изучаемым на практических занятиях.

### 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Виды самостоятельной работы студентов, распределенные по темам:

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы	
	Обязательные	дополнительные
<b>Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных</b>		
1. Голоморфные функции.	Работа с литературой, решение домашнего задания	[1], глава VIII, §1, [4], глава 1, §1–3
2. Голоморфные отображения	Работа с литературой, решение	[4], глава 1, §2, [6], § 7
	домашнего задания	
<b>Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного анализа</b>		



1. Многообразия и формула Стокса	Работа с литературой, решение домашнего задания	подготовка к коллоквиуму, [4], § 5
2. Области голоморфности	Работа с литературой, решение домашнего задания	[4], глава 3, §12, [1], § 2.

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-1	<p>Знает: основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p>Умеет: решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p>Владеет: методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>	<p>Повторение постановок задач и их решения в классическом анализе, сравнение с аналогичными задачами в одномерном случае.</p> <p>Проверка освоения в виде устного опроса и тестирования.</p>

ПК-3	<p>Знает: основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p>Умеет: решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p>Владеет: методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>	<p>Изучение тем дисциплины по лекциям, основной литературе [1] – [4], на практических занятиях решать задачи из книг [1], [2], [6]; выступления с докладами</p>
------	--	---

## 7.2. Типовые контрольные задания

### 7.2.1. Примерные задания для контрольных работ

1. Построить границы Шилова для следующих областей: 1) шар, 2) поликруг, 3) трубчатая область.
2. Найти области сходимости рядов:
  - а)  $\sum z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ ; б)  $\sum z_1^{m_1} z_2$ ; в)  $\sum (z_1 z_2)^m$ .
3. Показать, что степенной ряд

$$\sum_{m,n \geq 0} \frac{(m+n)!}{m!n!} z_1^m z_2^n$$

абсолютно сходится тогда и только тогда, когда  $|z_1| + |z_2| < 1$ .

4. Доказать, что если голоморфная функция  $f(z_1, z_2)$  равна нулю на множестве  $\{z_1 = \bar{z}_2\}$ , то  $f \equiv 0$ .
5. Докажите, что унитарное преобразование в  $\mathbb{C}^2$  можно записать в виде

$$(z_1, z_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} \left( e^{i\theta_1} (z_1 + \lambda z_2), e^{i\theta_2} (\bar{\lambda} z_1 - z_2) \right),$$

где  $\lambda$  – комплексное, а  $\theta_1, \theta_2$  – вещественные числа.

6. Докажите, что две различные комплексные прямые в  $\mathbb{C}^2$  могут иметь не более одной общей точки.
7. Докажите, что в проективном пространстве  $\mathbb{P}^n$  две любые комплексные гиперплоскости пересекаются.
8. Докажите, что преобразование Рейнхарта  $\alpha(z) = (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$  переводит любую область  $D \subset \mathbb{C}^n$ , не пересекающуюся с множеством  $\{z_1 \cdots z_n = 0\}$ , в область пространства  $\mathbb{R}^n$ .
9. Постройте степенные ряды, для которых областью сходимости являются: а) шар  $\{z \in \mathbb{C}^2: |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ ; б) область  $\{z \in \mathbb{C}^2: |z_1| + |z_2| < 1\}$ .
10. Для сферы  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1\}$  постройте гладкий атлас, состоящий из двух карт.
11. Даны дифференциальные формы  $\omega' = \sum_{k=1}^n a_k dz_k$  и  $\omega'' = \sum_{k=1}^n b_k dz_k$  степени  $(1,0)$  такие, что соответствующие им векторы  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  ортогональны в смысле евклидова скалярного произведения. Докажите, что  $\omega' \wedge \omega'' = 0$  только в случае, когда  $\omega' = 0$  или  $\omega'' = 0$ .
12. Пусть  $f$  голоморфна в поликруге  $U \subset \mathbb{C}^n$  и непрерывна на множестве  $U \cup \Gamma$ , где  $\Gamma$  – остов  $U$ . Докажите, что  $f$  продолжается до функции из  $C(\bar{U})$ .
13. Докажите, что область сходимости ряда из полиномов является полиномиально выпуклой.
14. Докажите, что отображение  $f: D \rightarrow \mathbb{C}^n$  класса  $C^1$  голоморфна в области  $D \subset \mathbb{C}^m$  в том и только том случае, когда его график  $\{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{m+n}: z \in D\}$  – комплексное многообразие.

### 7.2.1. Примерные контрольные вопросы для подготовки к зачету

1. Пространство  $\mathbb{C}^n$ , простейшие области в нем.
2. Голоморфные функции и их простейшие свойства.
3. Многомерные условия Коши -Римана.
4. Теорема Хартогса.
5. Разложение голоморфных функций в степенные ряды, ряды Лорана и Хартогса.

6. Голоморфные отображения и их свойства. Группы автоморфизмов простейших областей. Инвариантные метрики.
7. Многообразия и формы. Цепи и их границы.
8. Дифференцирование форм.
9. Формула Стокса.
10. Определение области голоморфности в  $\mathbb{C}^n$ .
11. Продолжение с помощью формулы Коши.
12. Принцип максимума для аналитических дисков, продолжение с помощью дисков.
13. Голоморфная выпуклость и область голоморфности (эквивалентность). Форма Леви вещественной гиперповерхности.
14. Субгармонические и плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклость.

### **7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%. Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов. Промежуточный контроль по дисциплине включает:
  - устный опрос – 50 баллов,
  - письменная контрольная работа – 50 баллов.

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **а) основная литература:**

#### **1. Ганнинг Р.**

Аналитические функции многих комплексных переменных. / Пер. с англ.

И.Я. Вахутинского и В.Я. Яна. Под ред. Е.А. Горина. - М. : Мир, 1969. - 395с. ; 22см. - Библиогр.: с. 377-389.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

**2. Бицадзе Андрей Васильевич.**

Основы теории аналитических функций комплексного переменного :  
Для мех.-мат.и физ. специальностей вузов / Бицадзе Андрей Васильевич.  
- 2-е изд. - М. : Наука, 1972. - 263с. ; 20см. - 0-57.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

**3. Шабат, Б.В.**

Введение в комплексный анализ. Ч.2 : Функции нескольких переменных / Б.  
В. Шабат. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.,  
1985. - 336 с. - 00-95.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

**4. Владимиров, Василий Сергеевич.**

Методы теории функций многих комплексных переменных. / Владимиров,  
Василий Сергеевич; Предисловие академика Н.Н. Боголюбова. - М : Наука,  
1964. - 411 с. : с черт. ; 21 см. - с.400-407. Местонахождение: Научная  
библиотека ДГУ

**б) дополнительная литература:**

**5. Лаврентьев, М.А.**

Методы теории функций комплексного переменного : учебное пособие для  
вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - 4-е изд., испр. - М.: Наука, 1973. -  
736 с. - 1-77.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

**6. Привалов, Иван Иванович.**

Введение в теорию функций комплексного переменного : учеб. для вузов /  
Привалов, Иван Иванович. - Изд. 14-е, стер. - М. : Высш. шк., 1999. - 432 с. -  
35-70.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

**7. Зверович Э.И.** Вещественный и комплексный анализ. Часть 2.  
Интегральное исчисление функций скалярного аргумента. Часть 3.  
Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента  
[Электронный ресурс]: учебное пособие/ Зверович Э.И. – Электрон.

текстовые данные. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.– 306 с.– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20064.html>. – ЭБС «IPRbooks»

## 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	<a href="http://www.math.ru">www.math.ru</a>	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт – для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	<a href="http://www.exponenta.ru">www.exponenta.ru</a>	<p><b>Студентам:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- запустить установленный у Вас математический пакет</li> <li>выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии</li> </ul> <p><b>Преподавателям:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</li> </ul> <p><b>Всем заинтересованным пользователям:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе.</li> <li>2. найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.</li> </ol>
3.	Математика	<a href="http://www.mathematics.ru">www.mathematics.ru</a>	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	<a href="http://www.edu.ru">www.edu.ru</a>	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	<a href="http://elib.dgu.ru">http://elib.dgu.ru</a> , <a href="http://edu.icc.dgu.ru">http://edu.icc.dgu.ru</a>	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	<a href="http://www.mathnet.ru">www.mathnet.ru</a>	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Специфика изучаемой дисциплины «Многомерный комплексный анализ» состоит в том, что для ее освоения необходимо творчески владеть методами современной геометрии и топологии, алгебры и одномерного комплексного анализа, знать фундаментальные утверждения, отличающие многомерный комплексный анализ от одномерного и отражающие специфику многомерного случая. Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях. Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен. Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Многомерный комплексный анализ» необходимы:

**Системное программное обеспечение:** ОС Windows 7/8/10;

**Прикладное программное обеспечение:** MSOffice 2007/2010/2013;

**Сетевые приложения:** электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Для проведения лекционных и практических занятий по дисциплине необходима аудитория на 20-25 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины «Многомерный комплексный анализ». Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с

соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами. В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.