

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«**ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»  
Факультет математики и компьютерных наук

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Мера, интеграл и производная**

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа  
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа  
01.04.01 Математика

Профили подготовки:  
Дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования:  
магистратура

Форма обучения:  
очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП,  
базовый модуль направления.

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины «Мера, интеграл и производная» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.01 Математика (уровень магистратуры) от 10.01.2018 №12 (с изменениями №1456 от 26.11.2020)

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,

Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент:



Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. Кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол № 7

Председатель  Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Мера, интеграл и производная» входит в обязательную часть образовательной программы магистратуры по направлению 01.04.01 Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

К основным задачам данного курса относятся изучение основных свойств аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и конструирование мер Стильеса, Стильеса-Бореля и Стильеса-Лебега на прямой с помощью функций ограниченной вариации.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

общепрофессиональных – ОПК-1,  
профессиональных – ПК-1; ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия и самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 5 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

| Семестр | Учебные занятия                                |                      |                      |     |              |         | СРС,<br>в том<br>числе<br>экзамен | Форма<br>промежуточной<br>аттестации (зачет,<br>дифференцирован<br>ный зачет,<br>экзамен |
|---------|--|----------------------|----------------------|-----|--------------|---------|-----------------------------------|--|
|         | в том числе                                    |                      |                      |     |              |         |                                   |  |
|         | Контактная работа обучающихся с преподавателем |                      |                      |     |              |         |                                   |  |
|         | Всего  | из них               |                      |     |              |         |                                   |  |
| Лекции  |  | Лабораторные занятия | Практические занятия | КСР | консультации | экзамен |                                   |  |
| 6       | 180  | 32                   | 34                   |     |              | 78+36   | Экзамен                           |  |

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины мера, интеграл и производная является научить слушателей понимать основные положения абстрактной теории аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и связь мер Стильеса, Бореля-Стильеса и Стильеса-Лебега функциями ограниченной вариации вещественного аргумента. Понятие и факты курса составляют фундамент многих разделов современного анализа.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина мера, интеграл и производная входит в базовую часть образовательной программы по направлению 01.04.01 Математика

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

Предполагает знание основных понятий и методов математического анализа и общей топологии в рамках первых двух курсов математического факультета, а также знаний свойств функций основных классов функций действительного переменного.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

| Код и наименование компетенции из ОПОП  | Код и наименование индикатора достижения компетенций   | Планируемые результаты обучения   | Процедура освоения   |
|---|--|---|--|
| ОПК-1.<br>способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики | ОПК-1.1.<br>Обладает фундаментальными знаниями в области математики<br>ОПК-1.2.<br>Умеет использовать фундаментальные знания в области математики в профессиональной деятельности<br>ОПК-1.3.<br>Может осуществить выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний. | <b>Знает:</b><br>важнейшие свойства линейных мер и основных видов интегралов, применяемых в современном анализе; постановку различных актуальных и значимых задач современного функционального анализа.<br><b>Умеет:</b><br>анализировать измеримость множеств и функций, существование интегралов, давать двусторонние оценки интегралов, применять их при решении задач фундаментальной и прикладной математики.<br><b>Владеет:</b><br>основными методами современного функционального анализа, в частности, анализа свойств метрических, линейно нормированных и гильбертовых пространств, а также различных операторов в этих пространствах | Конспектирование и проработка лекционного материала.<br>Самостоятельная работа |
| ПК-1.<br>способностью к интенсивной научно-исследовательской работе                 |  | <b>Знает:</b><br>теоретические основы базовых математических дисциплин современного анализа (вещественного анализа, комплексного анализа и функционального анализа), а также определения и важнейшие свойства основных видов интегралов, применяемых в современном анализе.<br><b>Умеет:</b><br>решать задачи, связанные с анализом и применением различных методов из области математических и физических наук;<br>анализировать существование интегралов, давать двусторонние оценки интегралов, применять их в прикладных задачах.<br><b>Владеет:</b><br>базовыми методами   | Конспектирование и проработка лекционного материала.<br>Самостоятельная работа |

|  |  |   |   |
|--|--|---|---|
|  |  | современной математики по исследованию математических и естественнонаучных задач; методами функционального анализа  |   |
| ПК-2.<br>способностью к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом |  | <p><b>Знать:</b><br/>существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии;</p> <p><b>Уметь:</b><br/>создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы;</p> <p><b>Владеть:</b><br/>в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.</p> | Конспектирование и проработка лекционного материала. Самостоятельная работа |

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 5, академических часов 180.

#### 4.2. Структура дисциплины.

| Названия разделов и тем дисциплины   | Семестр   | Неделя семестра | Аудиторные занятия, в том числе |                |               |                  | Самостоят. работа | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)<br>Форма промежуточной аттестации (по семестрам) |
|--|-----------|-----------------|---------------------------------|----------------|---------------|------------------|-------------------|---|
|  |           |                 | лекции                          | практ. занятия | лабор. работы | Контр. сам. раб. |                   |   |
| <b>Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>           |           |                 |                                 |                |               |                  |                   |   |
| <i>Всего по модулю 1</i>   | <i>11</i> |                 | <i>8</i>                        | <i>8</i>       |               |                  | <i>20</i>         | контрольная работа  |
| 1. Основные классы множеств  |           |                 | 4                               | 4              |               |                  | 10                |   |
| 2. Порожденные классы множеств   |           |                 | 4                               | 4              |               |                  | 10                |   |
| <b>Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b> |           |                 |                                 |                |               |                  |                   |   |

|   |           |  |           |           |  |  |              |                                   |
|---|-----------|--|-----------|-----------|--|--|--------------|-----------------------------------|
| <b>Всего по модулю 2</b>  | <b>11</b> |  | <b>8</b>  | <b>10</b> |  |  | <b>18</b>    | коллоквиум,<br>контрольная работа |
| 1. Функции множества. Меры.   |           |  | 4         | 4         |  |  | 8            |                                   |
| 2. Продолжение меры   |           |  | 4         | 6         |  |  | 10           |                                   |
| <b>Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента</b> |           |  |           |           |  |  |              |                                   |
| <b>Всего по модулю 3</b>  | <b>11</b> |  | <b>8</b>  | <b>8</b>  |  |  | <b>20</b>    | контрольная работа                |
| 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации                    |           |  | 4         | 4         |  |  | 10           |                                   |
| 2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации        |           |  | 4         | 4         |  |  | 10           |                                   |
| <b>Модуль 4. Теория меры на прямой</b>  |           |  |           |           |  |  |              |                                   |
| <b>Всего по модулю 4</b>  | <b>11</b> |  | <b>8</b>  | <b>8</b>  |  |  | <b>20</b>    | коллоквиум                        |
| 1. Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса   |           |  | 4         | 4         |  |  | 8            |                                   |
| 2. Мера Стильеса-Лебега   |           |  | 4         | 4         |  |  | 8            |                                   |
| <b>Модуль 5. Промежуточная аттестация</b>                                     |           |  |           |           |  |  |              |                                   |
| Подготовка к экзамену   |           |  |           |           |  |  | <b>36</b>    | экзамен                           |
| <b>ИТОГО за 9 семестр</b>   |           |  | <b>32</b> | <b>34</b> |  |  | <b>78+36</b> |                                   |

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### **Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура**

###### *Тема 1. Основные классы множеств*

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

###### *Тема 2. Порожденные классы множеств*

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

##### **Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства**

###### *Тема 1. Функции множества. Меры.*

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

#### *Тема 2. Продолжение меры*

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

### **Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента**

#### *Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

#### *Тема 2. Вещественные функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.

### **Модуль 4. Теория меры на прямой**

#### *Тема 1. Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса*

Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.

#### *Тема 2. Мера Стильеса-Лебега*

Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

## **4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине**

### **Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура**

#### *Тема 1. Основные классы множеств*

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

#### *Тема 2. Порожденные классы множеств*

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

### **Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства**

#### *Тема 1. Функции множества. Меры.*

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

## *Тема 2. Продолжение меры*

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

## **Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента**

### *Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

### *Тема 2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.

## **Модуль 4. Теория меры на прямой**

### *Тема 1. Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса*

Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.

### *Тема 2. Мера Стильеса-Лебега*

Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

## **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины *мера, интеграл и производная* лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Для обеспечения самостоятельной работы магистров использовать учебное пособие

- 1) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Лекции по теории меры и интеграла. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2016.
- 2) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.



- 3) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильтьеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 4) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.

### Задания для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$ -кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
12. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.

33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### Рефераты, доклады и задания по темам для самостоятельной работы

| Разделы и темы для самостоятельного изучения                                  | Виды и содержание самостоятельной работы  |
|---|---|
| <b>Раздел 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>            |   |
| 1. Основные классы множеств   | Доклад на тему: Пи-классы и лямбда-классы множеств  |
| 2. Порожденные классы множеств  | Доклад на тему: Приложения теоремы о монотонном классе  |
| <b>Раздел 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b>  |   |
| 1. Функции множества. Меры.   | Реферат на тему: Основные свойства функций множества.   |
| 2. Продолжение мер.   | Доклад на тему: Измеримость по Каратеодори  |
| <b>Раздел 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента</b> |   |
| 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации                    | Доклад на тему: функция скачков.  |
| 2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации        | Доклад на тему: Теорема Хелли   |
| <b>Раздел 4. Теория меры на прямой</b>  |   |
| 1. Меры Стильтьеса и Бореля-Стильтьеса  | Реферат на тему: Построение меры Лебега в $\mathbb{R}^1$                                      |
| 2. Мера Стильтьеса-Лебега   | Доклады на темы:<br>1. Борелевские множества на прямой.<br>2. Суслинские множества на прямой. |

### 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

#### 7.1. Типовые контрольные задания

#### Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
2. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
3. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
4. Свойства аддитивной функции множества.
5. Свойства полной вариации а.ф.м..
6. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
7. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
8. Свойства положительной а.ф.м..
9. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
10. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
11. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.

12. Непрерывность конечной положительной меры.
13. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
14. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
15. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
16. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
17. Лебеговский метод продолжения меры.
18. Теорема Хана о продолжении.
19. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
20. Мера Бореля.
21. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
22. Свойства функции ограниченной вариации
23. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
24. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
25. Критерий функции ограниченной вариации.
26. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
27. Определение функции скачков и их свойства.
28. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
29. Свойства производной неопределенной полной вариации.
30. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
31. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
32. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
33. Полнота пространства функций ограниченной вариации.

## Примерные контрольные работы

### Вариант 1.

1. Показать, что неотрицательная, аддитивная и сигма-полуаддитивная функция множества, заданная на кольце есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система всех подмножеств произвольного фиксированного множества является сигма-алгеброй.
3. Найдите полную вариацию функции  $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$  на отрезке  $[a, b]$ .
4. Доказать, что система всех интервалов (включая пустой) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Пусть  $R$  – кольцо. Доказать, что если мы возьмём симметрическую разность в качестве сложения и пересечение в качестве умножения, то  $R$  будет коммутативным кольцом в алгебраическом смысле, причем нулем этого кольца является пустое множество.

6. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n}, \\ -x^2, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$  интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$  и найдите  $(L)\int_0^1 f(x)dx$ .

### Вариант 2.

1. Доказать, что неотрицательная, аддитивная и непрерывная снизу на кольце функция множества есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система  $\mathcal{B}$  всех конечных подмножеств заданного множества  $A$  является кольцом.
3. Найдите полную вариацию функции  $y = \sin 2x - \cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$ .
4. Доказать, что система всех отрезков (с добавлением пустого множества) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Построить систему множеств, которая замкнута относительно операций пересечения и объединения, но не является даже полукольцом.

6. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in I \cap [1; 2], \\ 2x, & x \in I \cap [0; 1], \\ \sin x, & x \in Q \end{cases}$  интегрируема по Лебегу на  $[0, 2]$  и найдите  $(L)\int_0^2 f(x)dx$ .

### Вопросы для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$ -кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$ -алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой.
12. Свойства  $\sigma$ -а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.

16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александра о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### **Вопросы к экзамену по дисциплине**

1. Основные системы множеств. Минимальные классы множеств, содержащие данную систему множеству.
2. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
3. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
4. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
5. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
6. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
7. Свойства аддитивной функции множества.
8. Свойства полной вариации а.ф.м..
9. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
10. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
11. Свойства положительной а.ф.м..
12. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
13. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
14. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
15. Непрерывность конечной положительной меры.
16. Теорема Хана о разложении вещественной меры.

17. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
18. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
19. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
20. Лебеговский метод продолжения меры.
21. Теорема Хана о продолжении.
22. Теорема Александра о продолжении регулярной меры.
23. Мера Бореля.
24. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
25. Свойства функции ограниченной вариации
26. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
27. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
28. Критерий функции ограниченной вариации.
29. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
30. Определение функции скачков и их свойства.
31. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
32. Свойства производной неопределенной полной вариации.
33. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
34. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
35. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
36. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
37. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.
38. Условия сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
39. Условия поточечной сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
40. Принцип выбора Э.Хелли.
41. Меры Бореля-Стилтьеса и Лебега-Стилтьеса.
42. Характеристика борелевских мер.

## **7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для**

## освоения дисциплины.

### Основная литература:

#### Основная

- 1) Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович, Леонид Витальевич. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1977. - 741 с. : ил. ; 22 см. - Список лит.: с.719-730. - Указ. предм.: и обозначений: с. 731-741. - 3-20.
- 2) Рамазанов А. К. Лекции по теории меры и интеграла : учеб. пособие / Рамазанов А. К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2016. - 279,[2] с. - 389-50.
- 3) Магомедов Г.А. Основы теории меры : учебное пособие / Магомедов Г.А., Р. К. Рагимханов, М. М. Сиражудинов. - Махачкала : ИПЦ ДГУ, 1997. - 149 с. - 10-00.
- 4) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
- 5) Данилин А.Р. Функциональный анализ для магистрантов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Данилин А.Р.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 192 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66614.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

#### Дополнительная

- 6) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.
- 7) Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.
- 8) Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 216 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66213.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

## 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

| №  | Название     | Электронный адрес                                      | Содержание   |
|----|--------------|--|--|
| 1. | Math.ru      | <a href="http://www.math.ru">www.math.ru</a>           | Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика. |
| 2. | Exponenta.ru | <a href="http://www.exponenta.ru">www.exponenta.ru</a> | <b>Студентам:</b><br>- запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета,   |

|    |  |  |   |
|----|--|--|---|
|    |  |  | <p>подходящий и решить свою задачу по аналогии;</p> <p><b>Преподавателям:</b></p> <p>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</p> <p><b>Всем заинтересованным пользователям:</b></p> <p><b>1.</b> – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе.</p> <p><b>2.</b> – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.</p> |
| 3. | Математика   | <a href="http://www.mathematics.ru">www.mathematics.ru</a>   | учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.  |
| 4. | Российское образование.                            | <a href="http://www.edu.ru">www.edu.ru</a>   | федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.  |
| 5. | Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ        | <a href="http://elib.dgu.ru">http://elib.dgu.ru</a> ,<br><a href="http://edu.icc.dgu.ru">http://edu.icc.dgu.ru</a> |   |
| 6. | Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru) | <a href="http://www.mathnet.ru">www.mathnet.ru</a>   | Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.  |

## 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Дисциплина «Мера, интеграл и производная» является обязательной частью, изучаемых будущими магистрами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

- 1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
- 2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
- 3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
- 4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
- 5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
- 6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

- а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
- б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
- в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.



Учебная программа дисциплины *мера, интеграл и производная* распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

### **Методические рекомендации**

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

- 1) Колмогоров А., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. – М. : Наука, 1976.
- 2) Федоров В.М. *Теория функций и функционального анализа ч.1*, - М.: изд. МГУ, 2000.
- 3) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 4) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. *Аддитивные функции множества и смежные вопросы*. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

Решать задачи и упражнения из учебных пособий

- 1) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*. М.: Наука, 1988.
- 2) Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. *Действительный анализ в задачах*. М., 2005.
- 3) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева «Задачи и упражнения по функциональному анализу» Наука 2002

Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросы для самопроверки

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*. М.: Наука, 1988.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по предмету рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины мера, интеграл и производная. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.