

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Математический анализ

Кафедра математического анализа  
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа бакалавриата  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки  
Математический анализ и приложения

Форма обучения  
очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП;  
фундаментальный модуль

Махачкала, 2022

Рабочая программа дисциплины *математический анализ* составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки от 23 августа 2017 г. № 807.

Разработчики: *кафедра математического анализа,*  
*Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н, профессор*

Рабочая программа дисциплины одобрена:

*на заседании кафедры математического анализа*  
*от 22 марта 2022 г., протокол № 7.*

*Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Рамазанов А.-Р.К.*

*на заседании методического совета факультета математики и компьютерных наук*  
*от 23 марта 2022 г., протокол № 4.*

*Председатель \_\_\_\_\_ Ризаев М.К.*

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 г.

Начальник УМУ \_\_\_\_\_ Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *математический анализ* входит в фундаментальный модуль обязательной части ОПОП бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук* кафедрой *математического анализа*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных: с элементами теории множеств; со свойствами множества действительных чисел; с изучением и освоением базовых понятий анализа: предел функции, ее непрерывность, дифференцирование и интегрирование; с изучением фундаментальных свойств числовых и функциональных рядов.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
*универсальных* – УК - 1;  
*общепрофессиональных* – ОПК- 1;  
*профессиональных* – ПК - 1.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение контроля успеваемости в форме *контрольной работы и коллоквиума* и промежуточного контроля в форме *зачета и экзамена*.

Объем дисциплины в очной форме 26 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Сем естр	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации	
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				СРС, в том числе экзамен		
		Всего	из них					
Лекции	Практич еские занятия		КСР	консульт ации				
1	252	136	68	68			116	зачет, экзамен
2	252	136	68	68			116	зачет, экзамен
3	252	116	58	58			136	зачет, экзамен
4	180	96	48	48			84	зачет, экзамен
Ито го	936	484	242	242			452	

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины *математический анализ* являются:

- овладение основными понятиями анализа (функция, предел функции, непрерывность и дифференцируемость функции, производные и дифференциалы функции, мера и интеграл, ряд);
- творческое овладение основными методами и технологиями доказательства теорем и решения задач математического анализа;
- овладение основными методами дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, методами гармонического анализа, в частности, для создания базы последующим курсам.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина *математический анализ* входит в обязательную часть образовательной программы *бакалавриата* по направлению *02.03.01 Математика и компьютерные науки*.

Знания по математическому анализу студентам необходимы для изучения параллельных ему и последующих за ним университетских курсов: дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия и топология, функциональный анализ, уравнения в частных производных, теория вероятностей, численные методы, методы оптимизации и др.

Изучение курса математического анализа предполагает хорошее знание школьного курса математики, особенно владение тождественными преобразованиями алгебраических и тригонометрических выражений и знание свойств основных элементарных функций.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения)

Код и наименование компетенции из ФГОС ВО	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
УК-1.Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	<i>Знает:</i> структуру задач в области математического анализа, а также базовые составляющие таких задач. <i>Умеет:</i> анализировать постановку данной задачи в области математического анализа, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. <i>Владеет:</i> навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математического анализа.	Устный опрос, контрольные работы, тесты
	УК-1.2.Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	<i>Знает:</i> принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. <i>Умеет:</i> системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук.	Устный опрос, контрольные работы, тесты

		<i>Владеет:</i> навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок.	
	УК-1.3.Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	<p><i>Знает:</i> современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет.</p> <p><i>Умеет:</i> применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.</p>	Устный опрос, контрольные работы, тесты

<p>ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.</p>	<p><i>Знает:</i> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики.</p> <p><i>Умеет:</i> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.</p> <p><i>Владеет:</i> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p>	<p>Устный опрос, контрольные работы, тесты</p>
---	---	--	--

	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<p><i>Знает:</i> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p> <p><i>Умеет:</i> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p>	Устный опрос, контрольные работы, тесты
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	<p><i>Знает:</i> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><i>Умеет:</i> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками выбора методов решения задач современного математического анализа.</p>	Устный опрос, контрольные работы, тесты
ПК-1. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным	ПК-1.1. Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, формы подготовки научных публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований.	<p><i>Знает:</i> основы использования информационных технологий в науке; основные направления использования информационных технологий в научных исследованиях.</p> <p><i>Умеет:</i> применять современные методы и средства автоматизированного</p>	Устный опрос, контрольные работы, тесты

исследованиям		<p>анализа и систематизации научных данных; использовать современные информационные технологии для подготовки традиционных и электронных научных публикаций.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками применения информационных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.</p>	
	ПК-1.2. Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой.	<p><i>Знает:</i> основные результаты и методы решения задач, разработанные к настоящему времени в области выбранной научной тематики.</p> <p><i>Умеет:</i> определять задачи в связи с поставленной целью, а также объект и предмет научного исследования в соответствии с выбранной методикой.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками четкого и аргументированного изложения основных положений научного исследования, ясной демонстрации элементов научной новизны.</p>	Устный опрос, контрольные работы, тесты
	ПК-1.3. Имеет практический опыт использования сети	<i>Знает:</i> основные методы работы с ресурсами сети Интернет; основы	Устный опрос, контрольные работы, тесты





<i>Первый семестр</i>								
<b>Модуль 1. Множество действительных чисел</b>								
1. Множества. Логические символы. Отображение и функция. Графики.			2	2			4	
2. Действительные числа.			4	4			2	
3. Предел последовательности.			2	2			2	
4. Свойства сходящихся последовательностей.			2	2			2	
5. Монотонные последовательности.			2	2			2	
<b>Всего по модулю 1</b>	<b>1</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 2. Предел функции</b>								
1. Свойства пределов.			4	4			6	
2. Замечательные пределы.			4	4			6	
3. Асимптотическое поведение функций.			2	2			4	
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>1</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 3. Непрерывные функции</b>								
1. Локальные свойства непрерывных функций.			4	4			8	
2. Глобальные свойства непрерывных функций.			6	6			8	
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>1</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 4. Производная и дифференциал</b>								
1. Производная и дифференциал функции одной переменной.			6	6			6	
2. Теоремы о среднем дифференциального исчисления.			6	6			6	
<b>Всего по модулю 4</b>	<b>1</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 5. Формула Тейлора</b>								
1. Производные высших порядков.			6	6			6	
2. Формула Тейлора.			6	6			6	

<b>Всего по модулю 5</b>	<b>1</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 6. Исследование функции</b>								
1. Монотонность и точки экстремума.			4	4			4	
2. Выпуклость и точки перегиба.			4	4			4	
3. Полное исследование поведения функций.			4	4			4	
<b>Всего по модулю 6</b>	<b>1</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 7. Промежуточная аттестация</b>								
1. Зачет								
2. Экзамен								36
<b>Итого за первый семестр</b>			<b>68</b>	<b>68</b>			<b>80</b>	<b>36</b>
<i>Второй семестр</i>								
<b>Модуль 1. Неопределенный интеграл</b>								
1. Первообразная и неопределенный интеграл.			4	4			8	
2. Общие методы интегрирования функций.			6	6			8	
<b>Всего по модулю 1</b>	<b>2</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 2. Интегралы, выражаемые в элементарных функциях</b>								
1. Интегрирование рациональных функций			4	4			8	
2. Интегрирование некоторых иррациональных функций			2	2			6	
2. Интегрирование некоторых тригонометрических функций			2	2			6	
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>2</b>		<b>8</b>	<b>8</b>			<b>20</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 3. Определенный интеграл</b>								
1. Определение интеграла Римана.			2	2			1	
2. Суммы Дарбу. Условия интегрируемости функций.			4	4			1	
3. Свойства интеграла Римана. Теоремы о			6	6			1	

среднем. Основная теорема интегрального исчисления.								
4. Методы замены переменной и интегрирования по частям.			4	4			1	
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>2</b>		<b>16</b>	<b>16</b>			<b>4</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 4. Несобственные интегралы</b>								
1. Несобственные интегралы.			4	4			4	
2. Признаки сходимости.			4	4			6	
3. Геометрические и другие естественно-научные приложения определенного интеграла.			2	2			6	
<b>Всего по модулю 4</b>	<b>2</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 5. Пределы и непрерывность функций многих переменных</b>								
1. Конечномерное пространство. Понятие сходимости.			2	2			4	
2. Пределы функций многих переменных.			4	4			6	
3. Непрерывные функции многих переменных.			4	4			6	
<b>Всего по модулю 5</b>	<b>2</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 6. Производные функций многих переменных</b>								
1. Частные производные и дифференциал. Производная по направлению.			4	4			2	
2. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.			4	4			2	
3. Задачи на экстремум функций многих переменных.			2	2			2	
4. Существование непрерывных неявных функций.			2	2			1	
5. Существование дифференцируемых			2	2			1	

невных функций.								
<b>Всего по модулю 6</b>	<b>2</b>		<b>14</b>	<b>14</b>			<b>8</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 7. Промежуточная аттестация</b>								
1. Зачет								
2. Экзамен								36
<b>Итого за второй семестр</b>			<b>68</b>	<b>68</b>			<b>80</b>	<b>36</b>
<i>Третий семестр</i>								
<b>Модуль 1. Ряды с неотрицательными членами</b>								
1. Ряды действительных чисел, их свойства.			4	4			10	
2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.			4	4			10	
<b>Всего по модулю 1</b>			<b>8</b>	<b>8</b>			<b>20</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 2. Знакопеременные ряды</b>								
1. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.			4	4			4	
2. Признаки сходимости знакопеременных рядов.			4	4			4	
3. Бесконечные произведения. Связь с рядами.			2	2			8	
<b>Всего по модулю 2</b>			<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 3. Ряды функций</b>								
1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей.			4	4			6	
2. Равномерная сходимость рядов функций.			4	4			4	
3. Функциональные свойства суммы ряда.			2	2			6	
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>3</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 4. Степенные ряды</b>								
1. Область сходимости. Функциональные свойства.			2	2			8	

2. Ряд Тейлора.			4	4			8	
3. Приближение непрерывных функций многочленами.			2	2			4	
<b>Всего по модулю 4</b>	<b>3</b>		<b>8</b>	<b>8</b>			<b>20</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 5. Интегралы с параметрами</b>								
1. Интегралы, зависящие от параметра.			4	4			4	
2. Признаки равномерной сходимости интегралов.			2	2			6	
3. Гамма- и бета-функции Эйлера и их приложения.			2	2			10	
<b>Всего по модулю 5</b>	<b>3</b>		<b>8</b>	<b>8</b>			<b>20</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 6. Ряды Фурье</b>								
1. Ортогональные системы функций.			2	2			2	
2. Тригонометрический ряд Фурье.			2	2			2	
3. Сходимость ряда Фурье в точке.			2	2				
4. Ряды Фурье для четных, нечетных и $2l$ -периодических функций.			2	2			2	
5. Ряды Фурье непрерывных функций.			2	2				
6. Ряды Фурье функций с интегрируемым квадратом.			4	4			2	
<b>Всего по модулю 6</b>	<b>4</b>		<b>14</b>	<b>14</b>			<b>8</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 7. Промежуточная аттестация</b>								
1. Зачет								
2. Экзамен								36
<b>Итого за третий семестр</b>			<b>58</b>	<b>58</b>			<b>100</b>	<b>36</b>
<i>Четвертый семестр</i>								
<b>Модуль 1. Двойные интегралы</b>								
1. Плоская мера Жордана. Свойства.			2	2			4	
2. Двойной интеграл.			6	6			4	

Свойства.								
3. Замена переменных в двойном интеграле.			4	4			4	
<b>Всего по модулю 1</b>	<b>4</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 2. Тройные и общие кратные интегралы</b>								
1. Объемная мера Жордана. Тройной интеграл.			4	4			4	
2. Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.			4	4			4	
3. Несобственные кратные интегралы.			4	4			4	
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>4</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 3. Вариация функции и приложения к интегралам и рядам</b>								
1. Вариация функции и спрямляемые кривые.			2	2			4	
2. Понятие об интеграле Стильеса.			2	2			2	
3. Приложения вариации функции к рядам Фурье.			2	2			2	
4. Криволинейные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.			2	2			2	
5. Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина.			4	4			2	
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>4</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум, контрольная работа</i>
<b>Модуль 4. Поверхностные интегралы и элементы теории поля</b>								
1. Поверхностные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.			2	2			2	
2. Поверхностные интегралы второго рода. Свойства. Вычисление.			4	4			2	
3. Скалярные и векторные поля.			2	2			4	
4. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса. Приложения.			4	4			4	
<b>Всего по модулю 4</b>	<b>4</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	<i>коллоквиум,</i>

								<i>контрольная работа</i>
<b>Модуль 5. Промежуточная аттестация</b>								
1. Зачет	4							
2. Экзамен	4							36
<b>Итого за четвертый семестр</b>			<b>48</b>	<b>48</b>			<b>48</b>	<b>36</b>
<b>ИТОГО</b>			<b>242</b>	<b>242</b>			<b>308</b>	<b>144</b>

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

#### Первый семестр

##### **Модуль 1. Множество действительных чисел**

Тема 1. Множества. Логические символы. Отображение и функция. Графики.

Множества и операции над ними. Запись математических утверждений с помощью логических символов. Методы их доказательства. Понятие о функции и отображении. Типы отображений. Обратная функция. Сложная функция. Графики элементарных функций и их преобразования.

Тема 2. Действительные числа.

Натуральные, целые и рациональные числа. Необходимость расширения множества рациональных чисел. Действительные числа как множество бесконечных десятичных дробей. Границы и грани числовых множеств. Лемма о точных границах. Действия над действительными числами. Другие леммы о непрерывности множества действительных чисел: об отделимости, о вложенных сегментах, о конечном покрытии интервалами, о предельных точках. Понятие об аксиоматическом построении множества действительных чисел.

Тема 3. Предел последовательности.

Последовательности действительных чисел. Предел числовой последовательности.

Тема 4. Свойства сходящихся последовательностей.

Ограниченность последовательности. Единственность предела. Переход к пределу в неравенствах и арифметических операциях. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей.

Тема 5. Монотонные последовательности.

Свойства монотонных последовательностей. Теорема Эйлера.

##### **Модуль 2. Предел функции**

Тема 6. Свойства пределов.

Определение предела функции. Основные свойства конечного предела функции.

Критерий Коши существования конечного предела функции.

Основная теорема о пределах. Переход к пределу в неравенствах.

Тема 7. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел. Предел монотонной функции. Пределы показательной и логарифмической функций. Предел показательно-степенной функции. Второй замечательный предел. Другие замечательные пределы.

Тема 8. Асимптотическое поведение функций.

Асимптотическое поведение функций в окрестности данной точки. Эквивалентные функции. Раскрытие неопределенностей.

##### **Модуль 3. Непрерывные функции**

Тема 9. Локальные свойства непрерывных функций.

Непрерывность и односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Свойства непрерывных в точке функций.

Тема 10. Глобальные свойства непрерывных функций.

Свойства непрерывных на сегменте функций. Условия непрерывности монотонных



функций. Элементарные функции и их непрерывность.

#### ***Модуль 4. Производная и дифференциал***

Тема 11. Производная и дифференциал функции одной переменной.

Определение производной. Дифференцируемость и дифференциал функции. Связь с непрерывностью. Некоторые приложения производной и дифференциала. Производная обратной функции. Производная и дифференциал сложной функции. Таблица производных. Правила дифференцирования.

Тема 12. Теоремы о среднем дифференциального исчисления.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Приложения к нахождению пределов.

#### ***Модуль 5. Формула Тейлора***

Тема 13. Производные высших порядков.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Тема 14. Формула Тейлора.

Формула Тейлора с остатком в различных формах: Пеано, Лагранжа и Коши. Разложения элементарных функций.

#### ***Модуль 6. Исследование функции***

Тема 15. Монотонность и точки экстремума.

Условия монотонности функции. Условия локального экстремума функции.

Тема 16. Выпуклость и точки перегиба.

Выпуклые функции. Точки перегиба графика.

Тема 17. Полное исследование поведения функций.

Четность, нечетность, периодичность. Асимптоты графика функции.

Полная схема исследования и построения графика функции.

### **Второй семестр**

#### ***Модуль 1. Неопределенный интеграл***

Тема 18. Первообразная и неопределенный интеграл.

Первообразная функция. Определение неопределенного интеграла как множества первообразных. Свойства неопределенных интегралов. Табличные интегралы.

Тема 19. Общие методы интегрирования функций.

Метод замены переменной. Интегрирование по частям.

#### ***Модуль 2. Интегралы, выражаемые в элементарных функциях***

Тема 20. Интегрирование рациональных функций и некоторых функций специального вида.

Интегралы от рациональных дробей с неприводимыми знаменателями. Интегрирование рациональных функций общего вида.

Тема 21. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Интегрирование простейших иррациональностей, дифференциального бинома.

Подстановки Эйлера.

Тема 22. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Нахождение интегралов подстановкой. Интегралы, приводимые к интегралам от рациональных функций или от некоторых иррациональных функций.

#### ***Модуль 3. Определенный интеграл***

Тема 23. Определение интеграла Римана.

Задачи, приводящие к определенному интегралу. Определенный интеграл.

Необходимое условие интегрируемости. Вычисление с помощью интегральных сумм.

Тема 24. Суммы Дарбу. Условия интегрируемости функций.

Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерии интегрируемости функций.

Интегрируемость непрерывных функций и монотонных функций. Интегрируемые разрывные функции.

Тема 25. Свойства интеграла Римана. Теоремы о среднем. Основная теорема интегрального исчисления.

Основные свойства интегрируемых функций и интегралов.

Первая теорема о среднем и ее обобщение. Вторая теорема о среднем.

Интегралы с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

Различные формулировки основной теоремы интегрального исчисления.

Тема 26. Методы замены переменной и интегрирования по частям.

Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

#### ***Модуль 4. Несобственные интегралы***

Тема 27. Несобственные интегралы. Признаки сходимости.

Определение несобственных интегралов (первого и второго родов). Их основные свойства. Критерии сходимости несобственных интегралов. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Тема 28. Геометрические и другие естественнонаучные приложения определенного интеграла.

Приложения определенного интеграла к вычислению длины дуги, площади плоской фигуры, площади поверхности и объема тела вращения. Некоторые приложения определенного интеграла в физике и механике.

#### ***Модуль 5. Пределы и непрерывность функций многих переменных***

Тема 29. Конечномерное пространство. Понятие сходимости. Функции многих переменных.

Определение сходимости в конечномерном пространстве. Свойства сходящихся последовательностей пространственных точек. Различные типы множеств в конечномерном пространстве: замкнутые и открытые, ограниченные, компактные, связные, сферические и прямоугольные окрестности точек.

Область определения функций двух и трех переменных. Графики. Линии и поверхности уровня.

Тема 30. Пределы функций многих переменных.

Кратный предел функции многих переменных. Свойства конечных пределов функций. Повторные пределы функции. Вычисление.

Тема 31. Непрерывные функции многих переменных.

Непрерывность функции многих переменных в точке. Свойства непрерывных в точке функций. Глобальные свойства непрерывных функций многих переменных.

#### ***Модуль 5. Производные функций многих переменных***

Тема 32. Частные производные и дифференциал. Производная по направлению.

Частные производные функции во внутренней точке. Дифференцируемость и полный дифференциал в точке. Геометрические приложения.

Частные производные от сложных функций. Производная по направлению.

Градиент. Дифференциал сложной функции, инвариантность его формы.

Тема 33. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Свойства. Формула Тейлора для функций многих переменных с остатком в форме Пеано и в форме Лагранжа.

Тема 34. Задачи на экстремум функций многих переменных.

Локальные экстремумы. Необходимые условия локального экстремума. Некоторые сведения о симметричных квадратичных формах. Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных. Понятие об условном экстремуме.

Тема 35. Существование непрерывных неявных функций.

Понятие неявной функции. Примеры.

Теорема о существовании непрерывной неявной функции.

Тема 36. Существование дифференцируемых неявных функций.

Теорема о существовании дифференцируемой неявной функции. Теорема о существовании дифференцируемого неявного отображения для конечномерных

пространств. Вычисление производных и дифференциалов неявных функций, определяемых данным уравнением или данной системой уравнений.

### **Третий семестр**

#### ***Модуль 1. Ряды с неотрицательными членами***

Тема 1. Ряды действительных чисел, их свойства.

Определение числового ряда. Частичная сумма и остаток. Сходимость и сумма числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши для рядов.

Тема 2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Интегральный признак сходимости ряда. Признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами. Признаки Даламбера и Коши. Признаки Раабе и Гаусса.

#### ***Модуль 2. Знакопеременные ряды***

Тема 3. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.

Абсолютно сходящиеся ряды, их безусловная сходимость. Сложение, вычитание и умножение абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.

Тема 4. Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Признак Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка для них. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле о сходимости рядов с парными произведениями.

Тема 5. Бесконечные произведения. Связь с рядами.

Бесконечные произведения. Частичное произведение. Необходимое условие сходимости произведения. Остаток произведения. Критерий сходимости. Взаимосвязь бесконечных произведений с рядами.

#### ***Модуль 3. Ряды функций***

Тема 6. Различные виды сходимости функциональных последовательностей.

Сходимость в точке и равномерная сходимость функциональной последовательности. Примеры. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Тема 7. Равномерная сходимость рядов функций.

Критерий равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Абеля-Харди, Дирихле-Харди.

Тема 8. Функциональные свойства суммы ряда.

Условия: 1) непрерывности суммы ряда; 2) интегрируемости суммы ряда; 3) дифференцируемости суммы ряда. Связь с равномерной сходимостью рядов.

#### ***Модуль 4. Степенные ряды***

Тема 9. Область сходимости. Функциональные свойства.

Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости. Формулы Даламбера и Коши-Адамара для радиуса сходимости. Свойства суммы ряда.

Тема 10. Ряд Тейлора.

Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Тема 11. Приближение непрерывных функций многочленами.

Ряды алгебраических многочленов. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной на сегменте функции алгебраическими многочленами.

#### ***Модуль 5. Интегралы с параметрами***

Тема 12. Интегралы, зависящие от параметра. Свойства.

Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров.

Тема 13. Признаки равномерной сходимости интегралов.

Сходимость, равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости

несобственных интегралов, зависящих от параметра. Функциональные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Тема 14. Гамма- и бета-функции Эйлера и их приложения.

Основные определения. Свойства гамма-функции и бета-функции Эйлера. Приложения к вычислению интегралов.

### ***Модуль 6. Ряды Фурье***

Тема 15. Ортогональные системы функций.

Понятие ортогональной системы функций. Примеры ортогональных систем.

Понятие общего ряда Фурье.

Тема 16. Тригонометрический ряд Фурье.

Тригонометрический ряд Фурье  $2\pi$  – периодических функций.

Лемма Римана. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле. Принцип локализации рядов Фурье.

Тема 17. Сходимость ряда Фурье в точке.

Признак Дини. Следствия. Примеры.

Тема 18. Ряды Фурье для четных, нечетных и  $2l$ -периодических функций.

Ряды Фурье для четных и для нечетных функций. Ряд Фурье функции периода  $2l$  при произвольном положительном  $l$ .

Тема 19. Ряды Фурье непрерывных функций.

Суммы Фейера и их равномерная сходимость.

Теорема Вейерштрасса о приближении периодических функций посредством тригонометрических полиномов.

Тема 20. Ряды Фурье функций с интегрируемым квадратом.

Среднее квадратичное уклонение. Минимальное свойство сумм Фурье общего вида.

Тождество и неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

## **Четвертый семестр**

### ***Модуль 1. Двойные интегралы***

Тема 21. Плоская мера Жордана. Свойства.

Определение плоской меры Жордана. Примеры. Критерий измеримости плоского множества по Жордану. Свойства измеримых по Жордану множеств.

Тема 22. Двойной интеграл. Свойства.

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла.

Суммы Дарбу. Классы интегрируемых функций. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу.

Тема 23. Замена переменных в двойном интеграле.

Криволинейные координаты. Площадь фигуры в криволинейных координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

### ***Модуль 2. Тройные и общие кратные интегралы***

Тема 24. Объемная мера Жордана. Тройной интеграл.

Понятие объемной меры Жордана. Критерий измеримости множества в трехмерном пространстве. Свойства измеримых множеств. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Определение тройного интеграла. Суммы Дарбу. Свойства тройного интеграла. Объем тела в криволинейных координатах. Способы вычисления тройного интеграла.

Тема 25. Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.

Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.

Вычисление тройного интеграла путем замены переменных. Приложения тройного интеграла.

Определение меры Жордана в произвольном конечномерном пространстве. Понятие о многомерных интегралах.

Тема 26. Несобственные кратные интегралы.

Понятие о несобственных кратных интегралах. Примеры.

### **Модуль 3. Вариация функции и приложения к интегралам и рядам**

Тема 27. Вариация функции и спрямляемые кривые.

Определение и некоторые свойства функций ограниченной вариации.

Тема 28. Понятие об интеграле Стильтьеса.

Определение и вычисление интеграла Стильтьеса. Классы функций, для которых интеграл Стильтьеса существует.

Тема 29. Приложения вариации функции к рядам Фурье.

Признак Дирихле-Жордана сходимости ряда Фурье. Сравнение с признаком Дини.

Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.

Тема 30. Криволинейные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.

Задачи, приводящие к криволинейному интегралу первого рода. Определение криволинейного интеграла первого рода. Существование. Свойства и вычисление.

Тема 31. Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина.

Определение криволинейного интеграла второго рода. Существование. Свойства.

Формула Грина. Приложения криволинейного интеграла к решению геометрических и физических задач (вычисление площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы).

### **Модуль 4. Поверхностные интегралы и элементы теории поля**

Тема 32. Поверхностные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.

Понятие площади гладкой поверхности. Пример Шварца.

Поверхностные интегралы первого рода. Определение, существование и вычисление.

Тема 33. Поверхностные интегралы второго рода. Свойства. Вычисление.

Ориентация поверхности. Определение, существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Тема 34. Скалярные и векторные поля.

Скалярные и векторные поля. Основные понятия, примеры.

Градиент, ротор, дивергенция.

Тема 35. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса. Приложения.

Формула Гаусса-Остроградского. Вычисление объемов с помощью поверхностного интеграла.

Формула Стокса. Выражение площади поверхности через криволинейный интеграл.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Аналог формулы Ньютона-Лейбница. Общая формула Стокса.

Векторная форма записи интегральных формул.

#### ***4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине***

##### **Первый семестр**

#### **Модуль 1. Множество действительных чисел**

Тема 1. Множества. Логические символы. Отображение и функция. Графики.

Множества и операции над ними. Обратная функция. Сложная функция. Графики элементарных функций и их преобразования.

Тема 2. Действительные числа.

Границы и грани числовых множеств. Лемма о точных границах. Действия над действительными числами. Другие леммы о непрерывности множества действительных чисел: об отделимости, о вложенных сегментах, о конечном покрытии интервалами, о предельных точках.

Тема 3. Предел последовательности.

Последовательности действительных чисел. Предел числовой последовательности.

Тема 4. Свойства сходящихся последовательностей.

Переход к пределу в неравенствах и арифметических операциях. Ограниченные

последовательности. Критерий Коши о числовых последовательностях.

Тема 5. Монотонные последовательности.

Свойства монотонных последовательностей. Теорема Эйлера.

### ***Модуль 2. Предел функции***

Тема 6. Свойства пределов.

Основные свойства конечного предела функции. Критерий Коши. Основная теорема о пределах.

Тема 7. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел. Предел монотонной функции. Второй замечательный предел. Другие замечательные пределы.

Тема 8. Асимптотическое поведение функций.

Асимптотическое поведение функций в окрестности данной точки. Эквивалентные функции. Раскрытие неопределенностей.

### ***Модуль 3. Непрерывные функции***

Тема 9. Локальные свойства непрерывных функций.

Непрерывность и односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Свойства непрерывных в точке функций.

Тема 10. Глобальные свойства непрерывных функций.

Свойства непрерывных на сегменте функций. Условия непрерывности монотонных функций.

### ***Модуль 4. Производная и дифференциал***

Тема 11. Производная и дифференциал функции одной переменной.

Некоторые приложения производной и дифференциала. Производная обратной функции. Производная и дифференциал сложной функции. Таблица производных. Правила дифференцирования.

Тема 12. Теоремы о среднем дифференциального исчисления.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Приложения к нахождению пределов.

### ***Модуль 5. Формула Тейлора***

Тема 13. Производные высших порядков.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 14. Формула Тейлора. Остаток.

Формула Тейлора с остатком в различных формах: Пеано, Лагранжа и Коши. Разложения элементарных функций.

### ***Модуль 6. Исследование функции***

Тема 15. Монотонность и точки экстремума.

Условия монотонности функции. Условия локального экстремума функции.

Тема 16. Выпуклость и точки перегиба.

Выпуклые функции. Точки перегиба графика.

Тема 17. Полное исследование поведения функций.

Асимптоты графика функции. Полная схема исследования и построения графика функции.

## **Второй семестр**

### ***Модуль 1. Неопределенный интеграл***

Тема 18. Первообразная и неопределенный интеграл.

Свойства неопределенных интегралов. Табличные интегралы.

Тема 19. Общие методы интегрирования функций.

Метод замены переменной. Интегрирования по частям.

### ***Модуль 2. Интегралы, выражаемые в элементарных функциях***

Тема 20. Интегрирование рациональных функций и некоторых функций специального вида.

Интегралы от рациональных дробей с неприводимыми знаменателями. Интегрирование

рациональных функций общего вида.

Тема 21. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Интегрирование простейших иррациональностей, дифференциального бинома.

Подстановки Эйлера.

Тема 22. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Нахождение интегралов подстановкой. Интегралы, приводимые к интегралам от рациональных функций или от некоторых иррациональных функций.

### **Модуль 3. Определенный интеграл**

Тема 23. Определение интеграла Римана.

Задачи, приводящие к определенному интегралу. Определенный интеграл.

Необходимое условие интегрируемости. Вычисление с помощью интегральных сумм.

Тема 24. Суммы Дарбу. Условия интегрируемости функций.

Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерии интегрируемости функций.

Интегрируемость непрерывных функций и монотонных функций. Интегрируемые разрывные функции.

Тема 25. Свойства интеграла Римана. Теоремы о среднем. Основная теорема интегрального исчисления.

Основные свойства интегрируемых функций и интегралов.

Первая теорема о среднем и ее обобщение. Вторая теорема о среднем.

Интегралы с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

Различные формулировки основной теоремы интегрального исчисления.

Тема 26. Методы замены переменной и интегрирования по частям.

Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Формула

Тейлора с остатком в интегральной форме.

### **Модуль 4. Несобственные интегралы**

Тема 27. Несобственные интегралы. Признаки сходимости.

Определение несобственных интегралов (первого и второго родов). Их основные свойства. Критерии сходимости несобственных интегралов. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Тема 28. Геометрические и другие естественнонаучные приложения определенного интеграла.

Приложения определенного интеграла к вычислению длины дуги, площади плоской фигуры, площади поверхности и объема тела вращения. Некоторые приложения определенного интеграла в физике и механике.

### **Модуль 5. Пределы и непрерывность функций многих переменных**

Тема 29. Конечномерное пространство. Понятие сходимости. Функции многих переменных.

Определение сходимости в конечномерном пространстве. Свойства сходящихся последовательностей пространственных точек. Различные типы множеств в конечномерном пространстве: замкнутые и открытые, ограниченные, компактные, связные, сферические и прямоугольные окрестности точек.

Область определения функций двух и трех переменных. Графики. Линии и поверхности уровня.

Тема 30. Пределы функций многих переменных.

Кратный предел функции многих переменных. Свойства конечных пределов функций.

Повторные пределы функции. Вычисление.

Тема 31. Непрерывные функции многих переменных.

Непрерывность функции многих переменных в точке. Свойства непрерывных в точке функций. Глобальные свойства непрерывных функций многих переменных.

### **Модуль 5. Производные функций многих переменных**

Тема 32. Частные производные и дифференциал. Производная по направлению.

Частные производные функции во внутренней точке. Дифференцируемость и полный

дифференциал в точке. Геометрические приложения.  
Частные производные от сложных функций. Производная по направлению.  
Градиент. Дифференциал сложной функции, инвариантность его формы.  
Тема 33. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.  
Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Свойства.  
Формула Тейлора для функций многих переменных с остатком в форме Пеано и в форме Лагранжа.  
Тема 34. Задачи на экстремум функций многих переменных.  
Локальные экстремумы. Необходимые условия локального экстремума. Некоторые сведения о симметричных квадратичных формах. Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных. Понятие об условном экстремуме.  
Тема 35. Существование непрерывных неявных функций.  
Понятие неявной функции. Примеры.  
Теорема о существовании непрерывной неявной функции.  
Тема 36. Существование дифференцируемых неявных функций.  
Теорема о существовании дифференцируемой неявной функции. Теорема о существовании дифференцируемого неявного отображения для конечномерных пространств. Вычисление производных и дифференциалов неявных функций, определяемых данным уравнением или данной системой уравнений.

### **Третий семестр**

#### **Модуль 1. Ряды с неотрицательными членами**

Тема 1. Ряды действительных чисел, их свойства.

Определение числового ряда. Частичная сумма и остаток. Сходимость и сумма числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши для рядов.

Тема 2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Интегральный признак сходимости ряда. Признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами.

Признаки Даламбера и Коши. Признаки Раабе и Гаусса.

#### **Модуль 2. Знакопеременные ряды**

Тема 3. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.

Абсолютно сходящиеся ряды, их безусловная сходимость. Сложение, вычитание и умножение абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.

Тема 4. Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Признак Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка для них.

Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле о сходимости рядов с парными произведениями.

Тема 5. Бесконечные произведения. Связь с рядами.

Бесконечные произведения. Частичное произведение. Необходимое условие сходимости произведения. Остаток произведения. Критерий сходимости. Взаимосвязь бесконечных произведений с рядами.

#### **Модуль 3. Ряды функций**

Тема 6. Различные виды сходимости функциональных последовательностей.

Сходимость в точке и равномерная сходимость функциональной последовательности.

Примеры. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Тема 7. Равномерная сходимость рядов функций.

Критерий равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Абеля-Харди, Дирихле-Харди.

Тема 8. Функциональные свойства суммы ряда.



Условия: 1) непрерывности суммы ряда; 2) интегрируемости суммы ряда; 3) дифференцируемости суммы ряда. Связь с равномерной сходимостью рядов.

#### **Модуль 4. Степенные ряды**

Тема 9. Область сходимости. Функциональные свойства.

Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости. Формулы Даламбера и Коши-Адамара для радиуса сходимости. Свойства суммы ряда.

Тема 10. Ряд Тейлора.

Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Тема 11. Приближение непрерывных функций многочленами.

Ряды алгебраических многочленов. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной на сегменте функции алгебраическими многочленами.

#### **Модуль 5. Интегралы с параметрами**

Тема 12. Интегралы, зависящие от параметра. Свойства.

Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров.

Тема 13. Признаки равномерной сходимости интегралов.

Сходимость, равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Функциональные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Тема 14. Гамма- и бета-функции Эйлера и их приложения.

Основные определения. Свойства гамма-функции и бета-функции Эйлера. Приложения к вычислению интегралов.

#### **Модуль 6. Ряды Фурье**

Тема 15. Ортогональные системы функций.

Понятие ортогональной системы функций. Примеры ортогональных систем.

Понятие общего ряда Фурье.

Тема 16. Тригонометрический ряд Фурье.

Тригонометрический ряд Фурье  $2\pi$  – периодических функций.

Лемма Римана. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле. Принцип локализации рядов Фурье.

Тема 17. Сходимость ряда Фурье в точке.

Признак Дини. Следствия. Примеры.

Тема 18. Ряды Фурье для четных, нечетных и  $2l$  – периодических функций.

Ряды Фурье для четных и для нечетных функций. Ряд Фурье функции периода  $2l$  при произвольном положительном  $l$ .

Тема 19. Ряды Фурье непрерывных функций.

Суммы Фейера и их равномерная сходимость.

Теорема Вейерштрасса о приближении периодических функций посредством тригонометрических полиномов.

Тема 20. Ряды Фурье функций с интегрируемым квадратом.

Среднее квадратичное отклонение. Минимальное свойство сумм Фурье общего вида.

Тождество и неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

### **Четвертый семестр**

#### **Модуль 1. Двойные интегралы**

Тема 21. Плоская мера Жордана. Свойства.

Определение плоской меры Жордана. Примеры. Критерий измеримости плоского множества по Жордану. Свойства измеримых по Жордану множеств.

Тема 22. Двойной интеграл. Свойства.

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла.

Суммы Дарбу. Классы интегрируемых функций. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу.

Тема 23. Замена переменных в двойном интеграле.

Криволинейные координаты. Площадь фигуры в криволинейных координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

### **Модуль 2. Тройные и общие кратные интегралы**

Тема 24. Объемная мера Жордана. Тройной интеграл.

Понятие объемной меры Жордана. Критерий измеримости множества в трехмерном пространстве. Свойства измеримых множеств. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Определение тройного интеграла. Суммы Дарбу. Свойства тройного интеграла. Объем тела в криволинейных координатах. Способы вычисления тройного интеграла.

Тема 25. Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.

Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты. Вычисление тройного интеграла путем замены переменных. Приложения тройного интеграла.

Определение меры Жордана в произвольном конечномерном пространстве. Понятие о многомерных интегралах.

Тема 26. Несобственные кратные интегралы.

Понятие о несобственных кратных интегралах. Примеры.

### **Модуль 3. Вариация функции и приложения к интегралам и рядам**

Тема 27. Вариация функции и спрямляемые кривые.

Определение и некоторые свойства функций ограниченной вариации.

Тема 28. Понятие об интеграле Стильеса.

Определение и вычисление интеграла Стильеса. Классы функций, для которых интеграл Стильеса существует.

Тема 29. Приложения вариации функции к рядам Фурье.

Признак Дирихле-Жордана сходимости ряда Фурье. Сравнение с признаком Дини.

Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.

Тема 30. Криволинейные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.

Задачи, приводящие к криволинейному интегралу первого рода. Определение криволинейного интеграла первого рода. Существование. Свойства и вычисление.

Тема 31. Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина.

Определение криволинейного интеграла второго рода. Существование. Свойства.

Формула Грина. Приложения криволинейного интеграла к решению геометрических и физических задач (вычисление площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы).

### **Модуль 4. Поверхностные интегралы и элементы теории поля**

Тема 32. Поверхностные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.

Понятие площади гладкой поверхности. Пример Шварца.

Поверхностные интегралы первого рода. Определение, существование и вычисление.

Тема 33. Поверхностные интегралы второго рода. Свойства. Вычисление.

Ориентация поверхности. Определение, существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Тема 34. Скалярные и векторные поля.

Скалярные и векторные поля. Основные понятия, примеры.

Градиент, ротор, дивергенция.

Тема 35. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса. Приложения.

Формула Гаусса-Остроградского. Вычисление объемов с помощью поверхностного интеграла.

Формула Стокса. Выражение площади поверхности через криволинейный интеграл.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Аналог формулы Ньютона-Лейбница. Общая формула Стокса.

Векторная форма записи интегральных формул.

## 5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины математический анализ лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия.

Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов организована в различных видах и формах, включая подготовку к учебным занятиям и научно-исследовательскую деятельность студентов, обеспечена учебно-методическими материалами. Контроль выполнения самостоятельной работы проводится средствами, соответствующими данному виду работы.

*Доклад* - продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы.

*Реферат* - продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой краткое изложение в письменном виде полученных результатов теоретического анализа определенной научной (учебно-исследовательской) темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее.

*Критерии оценки по докладу, реферату*

Если студент *по теме данного модуля* самостоятельно *подготовил доклад и выступил* с этим докладом публично или написал реферат и раскрыл тему реферата, то ему выставляются 30 баллов, которые учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

Примерное распределение времени самостоятельной работы студентов

Вид самостоятельной работы	Примерная трудоёмкость, а.ч.		
	Очная	Очно-заочная	заочная
<b>Текущая СРС</b>			
работа с лекционным материалом, с учебной литературой	30		
опережающая самостоятельная работа (изучение нового материала до его изложения на занятиях)	20		
самостоятельное изучение разделов дисциплины	20		
выполнение домашних заданий, домашних контрольных работ	60		
подготовка к практическим занятиям	30		
подготовка к контрольным работам, тестам, коллоквиумам, зачётам	60		
подготовка к экзаменам	60		
<b>Творческая проблемно-ориентированная СРС</b>			
подготовка рефератов и докладов, в том числе, с анализом научных публикаций по заданной теме	40		

исследовательская работа, выполнение курсовой работы	40		
участие в конференциях, семинарах, олимпиадах	20		
<b>Итого СРС:</b>	<b>380</b>		

*Учебно-методические пособия для самостоятельной работы*

1. Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В.Г. Построение множества действительных чисел. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2011.
2. Рамазанов А.-Р. К. Классы функций (избранные задачи с краткими решениями). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2000.
3. Гайдаров Д.Р. Математический анализ. Ч.1 (Методическое пособие для студентов I курса). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2002.
4. Гайдаров Д.Р. Математический анализ. Ч. 2 (Методическое пособие для студентов I курса). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2003.
5. Гайдаров Д.Р. Справочное пособие по математике. Махачкала, 2006.

*Задания для самостоятельной работы*

СР-1

1. По методу математической индукции доказать неравенство  $3^n \geq 3n$  для натуральных чисел  $n$ .
2. Найти супремум и инфимум множества  $E = \left\{ \frac{2n+1}{n+1}, n = 1, 2, \dots \right\}$ .
3. Построить графики функций  $y = \frac{1}{\ln(x^2 - x)}$ ,  $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $y = \frac{\cos x}{2 + x^2}$ .

СР-2

1. Найти предел функции  $f(x) = (\cos x)^{\lg x}$  в точке  $a = 0$ .
2. Исследовать характер точек разрыва функций  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .
3. Исследовать на дифференцируемость в точке  $x = 0$  функцию  $f(x)$ , если  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$  и  $f(0) = 0$ .
4. Найти точки экстремума и интервалы монотонности функции  $y = \ln \left( x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ .

СР-3

1. Найти неопределенные интегралы  $\int \frac{x+3}{x^2+2x-15} dx$ ,  $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}+1} dx$ ,  $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x} dx$ .
2. Вычислить интегралы  $\int_1^e x \ln x dx$ ,  $\int_0^\pi \sin x \cdot e^{\cos x} dx$ .
3. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций  $y = \sin x$  и  $y = \frac{4}{\pi^2} x^2$ .

СР-4

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ , 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ , 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{2n+1}}$ , 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ , 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ , 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{3^{3n+1}}$ .

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ , 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{(5n+1)^2}}$ , 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$ ,  
4)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ , 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$ , 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$ , 7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^n$ .

3. Найти области сходимости рядов:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1} x^n$  2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}} (x-1)^n$ , 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^n n!} \frac{1}{(x+1)^n}$ .

4. Разложить в ряд Фурье: а)  $f(x) = 1 - x$ ,  $x \in (2;4)$ ; б)  $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$ .

#### CP-5

1. Вычислить криволинейный интеграл I рода  $\int_C (x+y) ds$ , C:

$$x = t, y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, z = t^3, 0 \leq t \leq 1.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл II рода  $\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ , где C – четверть астроида

$$x = R \cos^3 t, y = R \sin^3 t \text{ от точки } (R,0) \text{ до точки } (0,R).$$

3. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x-y) dx dy$ ,  $D: y^2 = \frac{b^2}{2} x, y = \frac{b}{a} x$  ( $a > 0, b > 0$ ).

4. Перейти к полярным координатам и расставить границы  $\iint_D f\left(\frac{x}{y}\right) dx dy$ ,

$$D: y = x, y = -x, y = 1.$$

5. С помощью формулы Грина вычислить интеграл  $\int_C (1-x^2) y dx + x(1+y^2) dy$ , где C –

$$\text{окружность } x^2 + y^2 = R^2.$$

#### CP-6

1. Вычислить криволинейный интеграл I рода  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , C:  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,

$$y = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл II рода  $\int_C \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ , где  $C$  – полуокружность

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

3. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (1 - xy) dx dy$ ,  $D: y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4$ .

4. Перейти к полярным координатам и расставить границы  $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$ ,

$$D: -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

5. С помощью формулы Грина вычислить интеграл  $\int_C (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$ ,

где  $C$  – эллипс.

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
<i>Первый семестр</i>	
<b>Модуль 1. Множество действительных чисел</b>	
1. Множества. Логические символы. Отображение и функция. Графики.	Рефераты на темы: 1. Счетные множества.
2. Действительные числа.	Доклады на темы: 1. Дедекиндовы сечения. 2. Необходимость расширения множества рациональных чисел. 3. Несчетность множества действительных чисел любого интервала.
3. Предел последовательности.	Решение задач и упражнений.
4. Свойства сходящихся последовательностей.	Решение задач и упражнений.
5. Монотонные последовательности.	Доклад на тему: Теорема Эйлера о числе $e$ .
<b>Модуль 3. Предел функции</b>	
1. Свойства пределов.	Реферат на тему: Парадоксы Зенона.
2. Замечательные пределы.	Решение задач и упражнений.
3. Асимптотическое поведение функций.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 4. Непрерывные функции</b>	
1. Локальные свойства непрерывных функций.	Доклады на темы: 1. Различные определения непрерывности. Решение задач и упражнений.
2. Глобальные свойства непрерывных функций.	Доклады на темы: 1. Обратные тригонометрические функции.
<b>Модуль 5. Производная и дифференциал</b>	
1. Производная и дифференциал функции одной переменной.	Доклад на тему: Второй парадокс Зенона и дифференцируемость.
2. Теоремы о среднем дифференциального исчисления.	Доклад на тему: Теорема Дирихле о промежуточных значениях производной.
<b>Модуль 6. Формула Тейлора</b>	

1. Производные высших порядков.	Решение задач и упражнений.
2. Формула Тейлора.	Доклад на тему: Приложения производных высших порядков к исследованию функций.
<b>Модуль 7. Исследование функции</b>	
1. Монотонность и точки экстремума.	Решение задач и упражнений.
2. Выпуклость и точки перегиба.	Решение задач и упражнений.
3. Полное исследование поведения функций.	Реферат на тему: Неравенство Йенсена и его приложения.
<i>Второй семестр</i>	
<b>Модуль 1. Неопределенный интеграл</b>	
1. Первообразная и неопределенный интеграл.	Решение задач и упражнений.
2. Общие методы интегрирования функций.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 2. Интегралы, выражаемые через элементарные функции</b>	
1. Интегрирование рациональных функций .	Реферат на тему: Разложение рациональной функции на простейшие дроби. Доклад на тему: Метод Остроградского.
2. Интегрирование некоторых иррациональных функций	Решение задач и упражнений.
3. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 3. Определенный интеграл</b>	
1. Определение интеграла Римана.	Решение задач и упражнений.
2. Суммы Дарбу. Условия интегрируемости функций.	Доклады на темы: 1. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. 2. Интегрируемость разрывной функции Римана.
3. Свойства интеграла Римана. Теоремы о среднем. Основная теорема интегрального исчисления.	Доклад на тему: Восстановление функции по ее производной.
4. Методы замены переменной и интегрирования по частям.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 4. Несобственные интегралы</b>	
1. Несобственные интегралы. Признаки сходимости.	Решение задач.
2. Геометрические и другие естественно-научные приложения определенного интеграла.	Доклады на темы: 1. Вычисление объемов тел с вложенными сечениями. 2. Спряжляемые кривые. 3. Кривая Пеано.
<b>Модуль 5. Пределы и непрерывность функции многих переменных</b>	
1. Конечномерное пространство. Понятие сходимости. Функции многих переменных.	Доклад на тему: Метрические пространства и сходимость в них.
2. Пределы функций многих переменных.	Решение задач.
3. Непрерывные функции многих переменных.	Решение задач.
<b>Модуль 6. Производные функций многих переменных</b>	

1. Частные производные и дифференциал. Производная по направлению.	Доклад на тему: Теорема о конечных приращениях для функций многих переменных.
2. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.	Решение задач и упражнений.
3. Задачи на экстремум функций многих переменных.	Доклад на тему: Метод Лагранжа нахождения условного экстремума.
4. Существование непрерывных неявных функций.	Реферат на тему: Функция и способы ее задания.
5. Существование дифференцируемых неявных функций.	Решение задач и упражнений.
<i>Третий семестр</i>	
<b>Модуль 1. Ряды с неотрицательными членами</b>	
1. Ряды действительных чисел, их свойства.	Решение задач.
2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.	Доклады на темы: 1. Признак Раабе. 2. Признак Гаусса.
<b>Модуль 2. Знакопеременные ряды</b>	
1. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.	Доклады на темы: 1. Абсолютная и безусловная сходимости рядов. 2. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.
2. Признаки сходимости знакопеременных рядов.	Доклад на тему: Синус- и косинус-ряды.
3. Бесконечные произведения чисел, их свойства. Взаимосвязь бесконечных произведений и рядов.	Решение задач.
<b>Модуль 3. Ряды функций</b>	
1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей.	Решение задач и упражнений.
2. Равномерная сходимость рядов функций.	Решение задач и упражнений.
3. Функциональные свойства суммы ряда.	Рефераты на темы: 1. Дифференцирование рядов. 2. Интегрирование рядов.
<b>Модуль 4. Степенные ряды</b>	
1. Область сходимости. Функциональные свойства.	Решение задач и упражнений.
2. Ряд Тейлора.	Решение задач и упражнений.
3. Приближение непрерывных функций многочленами.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 5. Интегралы с параметрами</b>	
1. Интегралы, зависящие от параметра. Свойства.	Решение задач и упражнений.
2. Признаки равномерной сходимости.	Решение задач и упражнений.
3. Гамма- и бета-функции Эйлера и их приложения.	Реферат на тему: Приложения эйлеровых интегралов.
<b>Модуль 6. Ряды Фурье</b>	



1. Ортогональные системы функций.	Решение задач и упражнений.
2. Тригонометрический ряд Фурье.	Реферат на тему: Леммы Римана и Дирихле.
3. Сходимость ряда Фурье в точке.	Доклад на тему: Сравнение признаков Дини и Дирихле сходимости рядов Фурье.
4. Ряды Фурье для четных, нечетных и 2 $\pi$ -периодических функций.	Решение задач и упражнений.
5. Ряды Фурье непрерывных функций.	Решение задач и упражнений.
6. Ряды Фурье функций с интегрируемым квадратом.	Рефераты на темы: 1. Равенство Парсеваля и приложения. 2. Полные и замкнутые системы функций.
<i>Четвертый семестр</i>	
<b>Модуль 1. Двойные интегралы</b>	
1. Плоская мера Жордана. Свойства.	Реферат на тему: Общая мера Жордана.
2. Двойной интеграл. Свойства.	Решение задач и упражнений.
3. Замена переменных в двойном интеграле.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 2. Тройные и общие кратные интегралы</b>	
1. Объемная мера Жордана. Свойства. Тройной интеграл. Существование. Свойства. Вычисление.	Решение задач и упражнений.
2. Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.	Доклад на тему: Криволинейные координаты.
3. Несобственные кратные интегралы.	Решение задач и упражнений.
<b>Модуль 3. Вариация функции и приложения к интегралам и рядам</b>	
1. Вариация функции и спрямляемые кривые.	Доклад на тему: Критерий спрямляемости кривых.
2. Понятие об интеграле Стильтеса.	Доклад на тему: Вопросы существования интеграла Стильтеса.
3. Приложения вариации функции к рядам Фурье.	Доклад на тему: Признак Дирихле-Жордана сходимости ряда Фурье.
4. Криволинейные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.	Решение задач и упражнений.
5. Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина.	Решение задач и упражнений. Доклад на тему: Вычисление площади с помощью криволинейных интегралов.
<b>Модуль 4. Поверхностные интегралы и элементы теории поля</b>	
1. Поверхностные интегралы первого рода. Свойства. Вычисление.	Решение задач и упражнений. Доклад на тему: Пример Шварца о вычислении площади поверхности.
2. Поверхностные интегралы второго рода. Свойства. Вычисление.	Решение задач и упражнений.
3. Скалярные и векторные поля.	Решение задач и упражнений.
4. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса. Приложения.	Решение задач и упражнений.

**7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

### 7.1. Типовые контрольные задания

*Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу «Предел числовой последовательности»*

1. Верно ли «Неограниченность числовой последовательности – достаточное условие для ее расходимости»?
2. Верно ли «Монотонность числовой последовательности – необходимое условие для ее сходимости»?
3. Сформулируйте основные свойства сходящихся последовательностей и докажите одно из них.
4. Является ли фундаментальной последовательность  $x_n = \frac{1}{3n-7}$ ?
5. Верно ли «Бесконечно большая последовательность не ограничена сверху»?

*Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу «Определенный интеграл Римана»*

1. Определение интеграла Римана.
2. Суммы Дарбу, их свойства.
3. Условия существования определенного интеграла.
4. Некоторые классы интегрируемых функций.
5. Свойства интегрируемых функций и интегралов Римана.
6. Основная теорема интегрального исчисления.
7. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

*Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу «Числовые ряды»*

1. Понятие о несобственном интеграле.
2. Числовой ряд. Необходимое условие сходимости ряда.
3. Свойства сходящихся рядов.
4. Общий критерий сходимости числовых рядов.
5. Признаки сравнения рядов с неотрицательными элементами.
6. Интегральный признак сходимости рядов.
7. Признак Даламбера сходимости.
8. Признак Коши сходимости числовых рядов.
9. Признаки Раабе и Гаусса сходимости числовых рядов.
10. Условная и безусловная сходимости рядов.
11. Абсолютная и неабсолютная сходимости рядов.
12. Арифметические действия над абсолютно сходящимися рядами.
13. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.
14. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
15. Преобразование Абеля.
16. Признак Абеля сходимости рядов.
17. Признак Дирихле сходимости рядов.
18. Бесконечные произведения. Их сходимости.
19. Критерий сходимости произведения.
20. Сравнение сходимости произведений и соответствующих рядов.

*Примерные вопросы к коллоквиуму по разделу «Кратные и криволинейные интегралы»*

1. Сведение двойного интеграла к повторному.
2. Вычислить интеграл, если  $C$  - граница фигуры, ограниченной линиями.
3. Двойной интеграл в криволинейных интегралах.
4. Вычислить интеграл  $\int_C (x-y)dy$  по положительному направлению, если  $C$  - дуга параболы  $y = x^2$ . ( $0 \leq x \leq 1$ ).

5. Двойной интеграл в полярных координатах
6. Вычислить интеграл  $\int_{AB} (2x + y)dx + (2y + x)dy$ ;  $A(0,0), B(1,1)$ .
7. Формула Грина.
8. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = \sin \varphi$ .
9. Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода.
10. Найти площадь фигуры ограниченной линиями  $y = \sin x, y = -\sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ .
11. Определение и свойства криволинейного интеграла второго рода.
12. Вычислить интеграл  $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$ , где  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .
13. Существование и вычисления криволинейного интеграла первого рода.
14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2, z = 1$ .
15. Площадь в криволинейных координатах.
16. Вычислить интеграл  $\int_C (x + y) ds$  по границе треугольника, ограниченного линиями  $x = 0, y = 2 - x, y = 0$ .

*Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля*

-2)	<p>Пусть <math>E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}</math>. Тогда верно утверждение:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\sup E = 1, \inf E</math> не существует.</li> <li>2) <math>\inf E = 0, \min E</math> не существует.</li> <li>3) <math>\inf E = 0, \sup E</math> не существует.</li> <li>4) <math>\max E = 1, \inf E</math> не существует.</li> </ol>
-1)	<p>Последовательность <math>x_n = \frac{n}{n+1}</math> является</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) возрастающей.</li> <li>2) убывающей.</li> <li>3) стационарной.</li> <li>4) немонотонной.</li> </ol>
-3)	<p>Найти <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 - 7}</math>.</p> <p>1) 1;      2) не существует;      3) 0,5;      4) 0.</p>
-1)	<p>Найти <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)</math>.</p> <p>1) 0;      2) <math>\infty</math>;      3) <math>\sqrt{2}</math>;      4) не существует.</p>
-2)	<p>Выберите неверное утверждение:</p> <p>Если функция <math>f(x)</math> определена на интервале <math>(a, b)</math> и непрерывна в точке <math>c \in (a, b)</math>, то всегда</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>f(x)</math> ограничена в некоторой окрестности точки <math>c</math>;</li> <li>2) <math>f(x)</math> сохраняет знак в окрестности точки <math>c</math>;</li> <li>3) предел <math>f(x)</math> в точке <math>c</math> равен <math>f(c)</math>.</li> </ol>
-2)	<p>Выберите верное утверждение:</p>

	<p>Если функция <math>f(x)</math> равномерно непрерывна на данном промежутке, то всегда на этом промежутке</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>f(x)</math> ограничена;</li> <li>2) непрерывна;</li> <li>3) <math>f(x)</math> достигает своих точных границ.</li> </ol>
-1)	<p>Обратной к функции <math>f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}</math> на промежутке <math>(0, +\infty)</math> является</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>g(x) = \frac{1}{x^2}</math> на <math>(-\infty, 0)</math>;</li> <li>2) <math>g(x) = -\sqrt{x}</math> на <math>(0, +\infty)</math>;</li> <li>3) <math>g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}</math> на <math>(0, +\infty)</math>.</li> </ol>
-1)	<p>Найти суперпозицию <math>f(g(x))</math>, если <math>f(x) = 3^x</math>, <math>g(x) = x^3</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>3^{x^3}</math>;</li> <li>2) <math>x^{3^x}</math>;</li> <li>3) <math>3^{3^x}</math>.</li> </ol>
-2)	<p>Функция <math>f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}</math> является</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) четной;</li> <li>2) нечетной;</li> <li>3) ни четной, ни нечетной.</li> </ol>
-2)	<p>Производная функции <math>\sqrt[3]{x-1}</math> в точке <math>x=1</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) не существует;</li> <li>2) равна <math>+\infty</math>;</li> <li>3) равна <math>0</math>.</li> </ol>
-1)	<p>Найти точки перегиба графика функции <math>y = x^2 \ln x</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>e^{-1,5}</math>;</li> <li>2) <math>e^{-1}</math>;</li> <li>3) <math>e</math>.</li> </ol>
-3)	<p>Найти наибольшее значение функции <math>y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) не существует;</li> <li>2) <math>1</math>;</li> <li>3) <math>\frac{2}{\sqrt{3}}</math>.</li> </ol>
-2)	<p>Найти промежутки возрастания функции <math>y = x \ln x</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>[1, +\infty)</math>;</li> <li>2) <math>\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)</math>;</li> <li>3) <math>(e, +\infty]</math>.</li> </ol>
-1)	<p>Найти промежутки выпуклости (вниз) функции <math>y = x + \frac{1}{x}</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>(0, +\infty)</math>;</li> <li>2) <math>(1, +\infty)</math>;</li> <li>3) <math>(-\infty, 0)</math>.</li> </ol>
-2)	<p>Найти точки экстремумов функции <math>y = xe^{-x}</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>0</math>;</li> <li>2) <math>1</math>;</li> <li>3) <math>-1</math>.</li> </ol>
-3)	<p>Найти абсциссы точек, в которых касательная к графику функции <math>f(x) = x^3 - 3x^2 + 4</math> параллельна прямой <math>y = -3x</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>0</math>;</li> <li>2) <math>-1</math>;</li> <li>3) <math>1</math>.</li> </ol>
-2)	<p>Повторные пределы функции <math>f(x, y) = \frac{2x - y}{x + 2y}</math> в точке <math>O(0, 0)</math> равны</p>

	1) 1 и -1;                    2) 2 и -0,5;                    3) 2 и 2.
-3)	<p>Двойной предел функции <math>f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}</math> в точке <math>O(0,0)</math></p> <p>1) равен 1;                    2) не существует;                    3) 0;                    4) равен <math>\infty</math>.</p>
-2)	<p>Найти <math>\int x \ln x dx</math>.</p> <p>1) <math>x^2 \ln x + C</math>;  2) <math>\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C</math>;  3) <math>2x^2 \ln x - x^2 + C</math>.</p>
-1)	<p>Вычислить <math>\int_0^1 x e^x dx</math>.</p> <p>1) 1;                    2) e;                    3) 2.</p>
-3)	<p>Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций <math>y = 2x^2 + 1</math> и <math>y = x + 1</math>.</p> <p>1) <math>\frac{1}{12}</math>;                    2) <math>\frac{1}{12}</math>;                    3) <math>\frac{1}{24}</math>.</p>
-3)	<p>Вычислить объем тела, которое образовано вращением вокруг оси <math>OX</math> плоской фигуры, ограниченной графиками <math>y = x - x^2</math> и <math>y = 0</math>.</p> <p>1) <math>\frac{\pi}{20}</math>;                    2) <math>\pi</math>;                    3) <math>\frac{\pi}{30}</math>.</p>
-2)	<p>Вычислить несобственный интеграл <math>\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx</math>.</p> <p>1) <math>\frac{1}{4}</math>;                    2) <math>\frac{1}{3}</math>;                    3) расходится.</p>
-1)	<p>Вычислить несобственный интеграл <math>\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx</math>.</p> <p>1) <math>\frac{5}{4}</math>;                    2) расходится;                    3) <math>\frac{4}{5}</math>.</p>
-3)	<p>Сумма ряда <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}</math> равна</p> <p>1) 1.                    2) 0.                    3) 1,5.                    4) расходится.</p>
-1)	<p>Сумма ряда <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}</math> равна</p> <p>1) 1.                    2) 2,5.                    3) ряд расходится.                    4) 0,5.</p>
-2)	<p>Пусть <math>a_n = \frac{\ln n}{n}</math>, <math>b_n = \frac{1}{n \ln n}</math>, <math>c_n = \frac{1}{n \ln^2 n}</math>. Тогда:</p>

	<p>1) <math>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</math> расходится, <math>\sum_{n=2}^{\infty} b_n</math> и <math>\sum_{n=2}^{\infty} c_n</math> сходятся.</p> <p>2) <math>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</math> и <math>\sum_{n=2}^{\infty} b_n</math> расходятся, <math>\sum_{n=2}^{\infty} c_n</math> сходятся.</p> <p>3) все три ряда сходятся.</p> <p>4) все три ряда расходятся.</p>
-1)	<p>Произведение <math>\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} x^n\right)</math></p> <p>1) сходится при <math>x = -1</math>.                              2) сходится при <math>x = 1</math>.</p> <p>3) расходится при всех <math>x &gt; 0</math>.                      4) расходится лишь при <math>x &gt; 1</math>.</p>
-2)	<p>Дифференциал второго порядка функции <math>f(x, y) = x^2 \sin(2y)</math> в точке <math>M(1; \pi)</math> равен</p> <p>1) <math>dx^2 + 2dy^2</math>;              2) <math>8dxdy</math>;              3) <math>4dxdy</math>.</p>
-2)	<p>Найти частную производную <math>z'_y</math> неявной функции <math>z = z(x, y)</math>, определяемой уравнением <math>xz - z^2 + y^3 = 0</math>.</p> <p>1) <math>\frac{y^3}{x - z}</math>;              2) <math>\frac{3y^2}{2z - x}</math>;              3) <math>\frac{3y^2}{z - x}</math>.</p>
-1)	<p>Найти градиент функции <math>u = x^2 y^3</math> в точке <math>M(2, 1)</math>.</p> <p>1) <math>4\vec{i} + 12\vec{j}</math>;              2) <math>2\vec{i} - 3\vec{j}</math>;              3) <math>6\vec{i} - 5\vec{j}</math>.</p>
-2)	<p>Найти <math>d^2 u</math> в точке <math>M(1, 1)</math>, если <math>u = xy + yz + zx</math>.</p> <p>1) <math>dx^2 + dy^2 + dz^2</math>;              2) <math>2dxdy + 2dydz + 2dzdx</math>;              3) <math>0</math>.</p>

#### **Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов**

1. Множества и операции над ними.
2. Графики основных элементарных функций.
3. Пределы наиболее часто встречающихся числовых последовательностей.
4. Расширенная таблица эквивалентных функций.
5. Непрерывность основных элементарных функций.
6. Таблица производных элементарных функций.
7. Гиперболические функции, их производные и графики.
8. Высшие производные для суммы и произведения.
9. Примеры разложения по формуле Тейлора.
10. Таблица неопределенных интегралов (расширенная).
11. Некоторые сведения о разложении полиномов на неприводимые множители и рациональных функций на простейшие дроби.
12. Метод Остроградского интегрирования рациональных функций.
13. Метод неопределенных коэффициентов интегрирования некоторых трансцендентных функций.
14. Непосредственное вычисление бесконечных сумм и произведений.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

### *Критерии оценки по коллоквиуму*

По данному модулю студенту выставляются:

- 1) 10 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* их иллюстрировать на различных примерах;
- 2) 20 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать различные из них;
- 3) 30 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать их.

Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

### *Критерии оценки по контрольной работе*

Если студент *владеет по данному модулю навыками* решения типичных задач, то *по этому модулю* ему выставляются:

- 1) 30 баллов;
- 2) 20 баллов в случае наличия неточностей;
- 3) 10 баллов в случае наличия некоторых допустимых ошибок.

Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

### *Критерии оценки по тестированию*

Если студент *умеет* давать анализ теста по данному модулю, то *по этому модулю* ему выставляются: 10 баллов за удовлетворительный анализ, 20 баллов за достаточно полный анализ, 30 баллов за глубокий анализ, которые учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

### *Критерии оценки на зачетах и экзаменах*

На *зачете* по учебной дисциплине в *устной* или *письменной* форме проверяется выполнение студентом практической части курса и усвоение учебного материала лекционных и практических занятий.

*Экзамены* проводятся в соответствии с положением о курсовых экзаменах, как правило, по заранее подготовленным и утвержденным экзаменационным билетам. В билет рекомендуется включать не менее двух вопросов учебной программы курса, а также при необходимости можно включить задачи и примеры.

Общий результат *по экзамену* выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает курсовой экзамен, результаты которого оцениваются по 100-балльной системе ориентировочно по следующим критериям:

1) оценка «отлично», если у студента от 86 до 100 баллов с учетом степени усвоения, *высокий уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает четко и логически обоснованно;

2) оценка «хорошо», если у студента от 66 до 85 баллов с учетом степени усвоения, *достаточно высокий уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает в основном четко и логически обоснованно, но допускает отдельные неточности.

3) оценка «удовлетворительно», если у студента от 51 до 65 баллов с учетом степени усвоения, *достаточный уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает в основном правильно и в логической последовательности, но допускает отдельные неточности;

4) оценка «неудовлетворительно», если у студента от 0 до 50 баллов с учетом степени усвоения, *недостаточный уровень* знаний по программе курсового экзамена, имеются существенные пробелы в усвоении важных математических понятий программы курса, допускает ошибки в формулировках и доказательствах базовых теорем из программы курса.

Критерии оценки знаний студентов на зачетах такие же, как на курсовых экзаменах. При этом общий результат *по зачету* выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос, контрольная работа - 100 баллов.

Студенту выставляется «зачтено», если интегральная оценка составляет 51 – 100 баллов.

## 8. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

а) адрес сайта курса:

<http://cathedra.dgu.ru/OfTheDepartment.aspx?id=5>

б) основная литература:

1. [Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие. В 3 т. Т. 1](#) - Москва: Физматлит, 2001

Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - 8-е изд., испр. и доп. - Москва : Физматлит, 2001. - Т. 1. - 680 с. - ISBN 978-5-9221-0156-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83037> ().

2. [Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие. Т. 2](#) - Москва: Физматлит, 2001

Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - 8-е изд. - Москва : Физматлит, 2001. - Т. 2. - 861 с. - ISBN 978-5-9221-0157-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83038>()

3. [Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3](#) - Москва: Физматлит, 2002

Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196>()

4. [Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие](#) - Москва: ЧеРо, 1997

Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное



пособие / Б.П. Демидович. - Изд. 13-е, испр. - Москва : ЧеРо, 1997. - 624 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459722> ().

в) дополнительная литература:

1. **Никольский С. М. Курс математического анализа: учебник** - Москва: Физматлит, 2001  
Никольский, С.М. Курс математического анализа : учебник / С.М. Никольский. - 6-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2001. - 592 с. - ISBN 978-5-9221-0160-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69500> ().

2. **Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник. В 2 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ** - Москва: Физматлит, 2010  
Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2-х т. / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - Москва : Физматлит, 2010. - Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 425 с. - ISBN 978-5-9221-0185-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82818> ().

3. **Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: учебник, Ч. I** - Москва: Физматлит, 2009  
Ильин, В.А. Основы математического анализа : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 7-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2009. - Ч. I. - 647 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). - ISBN 978-5-9221-0902-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76686> ()

4. **Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. В 2-х частях: учебник, Ч. II** - Москва: Физматлит, 2009  
Ильин, В.А. Основы математического анализа. В 2-х частях : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 5-е изд. - Москва : Физматлит, 2009. - Ч. II. - 464 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 2). - ISBN 978-5-9221-0537-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83225> ().

## **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека

2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам

3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer

4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ

5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/>).

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по математическому анализу распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает

студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

При осуществлении образовательного процесса по математическому анализу рекомендуются:

- компьютерные технологии, основанные на операционных системах *Windows, Ubuntu, Linux*;
- прикладные программы *Matlab International Academic Edition Individual, Mathcad Academic*;
- электронный периодический справочник «*Система Гарант*»;
- справочная правовая система «*КонсультантПлюс*».

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

#### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.