

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Сплайн-аппроксимации функций

Кафедра *математического анализа*
факультета *математики и компьютерных наук*

Образовательная программа магистратуры
01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
Математический анализ

Форма обучения
очная

Статус дисциплины: входит в ОПОП в форме факультатива

Махачкала, 2022

Рабочая программа дисциплины *Сплайн-аппроксимации функций* составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика от 10.01. 2018 г. № 12.

Разработчики: *кафедра математического анализа,*
Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н, профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры математического анализа
от 22 марта 2022 г., протокол № 7.

Зав. кафедрой  Рамазанов А.-Р.К.

на заседании методического совета факультета математики и компьютерных наук
от 23 марта 2022 г., протокол № 4.

Председатель  Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» 03 2022 г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *Сплайн-аппроксимации функций* входит в ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений в форме факультативов образовательной программы магистратуры по направлению 01.04.01 Математика.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук* кафедрой *математического анализа*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с изучением различных видов сплайн-функций и их основных свойств, с освоением приложений сплайн-функций к решению дифференциальных уравнений и задач изогометрической аппроксимации.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
общепрофессиональных – ОПК-1,
профессиональных - ПК-1, ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение контроля успеваемости в форме *устного опроса* и промежуточного контроля в форме *зачета*.

Объем дисциплины 1 зачетная единица, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семе стр	Учебные занятия на очном отделении							Форма промежуточ ной аттестации	
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС		
		Всего	из них						
			Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР			Консультации
3	36	30	30	-	-	-	-	6	зачет

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины *Сплайн-аппроксимации функций* являются:

- овладение понятиями: сплайн-функция, полиномиальный сплайн, рациональный сплайн, локальный сплайн, глобальный сплайн;
- творческое овладение основными методами теории сплайн-функций, в частности, для создания базы последующим курсам.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина *Сплайн-аппроксимации функций* входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений в форме факультативов образовательной программы магистратуры по направлению 01.04.01 Математика.

Знания по этой дисциплине студентам необходимы для более глубокого овладения численными методами математического анализа, а также при прохождении курсов дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, численных методов, методов оптимизации и др.

Изучение дисциплины *Сплайн-аппроксимации функций* предполагает знание основ математического анализа, линейной алгебры и дифференциальных уравнений.

**3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины
(перечень планируемых результатов обучения)**

Код и наименование компетенции из ФГОС ВО	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук.	<p><i>Знает:</i> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики.</p> <p><i>Умеет:</i> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.</p> <p><i>Владеет:</i> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных</p>	Устный опрос, контрольные работы

		задач.	
	ОПК-1.2. Умеет использовать базовые знания в области математики в профессиональной деятельности.	<p><i>Знает:</i> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p> <p><i>Умеет:</i> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p>	Устный опрос, контрольные работы
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	<p><i>Знает:</i> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><i>Умеет:</i> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками выбора методов решения задач современного математического анализа.</p>	Устный опрос, контрольные работы
ПК-1. Способен понимать и применять в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, основные	ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	<p><i>Знает:</i> основы математического анализа и различные приложения дифференциального и интегрального исчисления в математических и естественных науках; современные языки программирования и современные</p>	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов.

<p>законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение, операционные системы и сетевые технологии.</p>		<p>информационные технологии. <i>Умеет:</i> применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных языках программирования. <i>Владеет:</i> базовыми методами дифференциального и интегрального исчислений; навыками программирования на современных языках.</p>	
	<p>ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.</p>	<p><i>Знает:</i> области применения дифференциального и интегрального исчисления; различные языки программирования. <i>Умеет:</i> решать задачи, связанные: с исследованием свойств функций и их производных, с изучением функциональных рядов, с оценкой погрешности аппроксимации функций; применять различные языки программирования в численном анализе. <i>Владеет:</i> методами дифференциального исчисления для исследования функций и навыками приложения интегрального исчисления к геометрии, физике и другим естественным наукам.</p>	<p>Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов.</p>

	<p>ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.</p>	<p><i>Знает:</i> методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов; методы исследования сходимости рядов; численные методы анализа; современные информационные технологии.</p> <p><i>Умеет:</i> применять методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов и методы исследования сходимости рядов в численном анализе с использованием современных информационных технологий.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками решения задач численного анализа с использованием методов дифференциального и интегрального исчисления.</p>	<p>Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов.</p>
<p>ПК-2. Способен владеть навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера; представления материалов собственных исследований; проводить корректуру, редактирование, реферирование работ.</p>	<p>ПК-2.1. Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, формы подготовки научных публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований.</p>	<p><i>Знает:</i> основы использования информационных технологий в науке; основные направления использования информационных технологий в научных исследованиях.</p> <p><i>Умеет:</i> применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; использовать современные информационные технологии для подготовки традиционных и электронных научных публикаций.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками использования</p>	<p>Устный опрос, контрольные работы</p>

		информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками применения информационных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.	
	ПК-2.2. Умеет представлять научные результаты, составлять научные документы и отчеты.	<p><i>Знает:</i> основные методы критического анализа и оценки современных научных достижений; методику представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме.</p> <p><i>Умеет:</i> критически анализировать современные научные достижения в области математического анализа.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками анализа и оценки современных научных достижений в области математического анализа; навыками перевода научных текстов и современными технологиями научной коммуникации на русском и иностранном языках.</p>	Устный опрос, контрольные работы
	ПК-2.3. Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического	<p><i>Знает:</i> основные методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные методы работы по информационным технологиям.</p> <p><i>Умеет:</i> публично представлять результаты научно-исследовательской работы;</p>	Устный опрос, контрольные работы

Модуль 1. Структура, аппроксимативные свойства и приложения сплайн-функций								
1. Понятие о сплайн-функциях.	3		2					Устный опрос
2. Полиномиальные сплайны.	3		4				2	Устный опрос
3. Рациональные сплайн-функции.	3		4					Устный опрос
4. Сплайн-решения дифференциальных уравнений	3		4					Устный опрос
5. Понятие о разностных схемах.	3		2					Устный опрос
6. Методы сплайн-решений дифференциальных уравнений.	3		4				2	Устный опрос
7. Формосохраняющие сплайн-интерполяции	3		4					Устный опрос
8. Выпуклая сплайн-интерполяция.	3		2					Устный опрос
9. Сглаживающие сплайны.	3		4				2	Устный опрос
<i>Всего по модулю 1</i>	3		30				6	
<i>Промежуточная аттестация</i>								
Зачет								зачет
<i>ИТОГО за семестр</i>	3		30				6	зачет

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Модуль 1. Структура, аппроксимативные свойства и приложения сплайн-функций

Тема 1. Понятие о сплайн-функциях.

Сплайн-функции, фрагменты, гладкость. Интерполяционные сплайны. Глобальные и локальные сплайны. Построение линейных сплайнов.

Тема 2. Полиномиальные сплайны.

Методы построения локальных сплайнов.

Вопросы существования и построения глобальных полиномиальных сплайнов.

Матричный метод построения глобальных сплайнов.

Вопросы существования глобальных полиномиальных сплайнов.

Оценки скорости сходимости сплайн-аппроксимаций.

Постановка задачи безусловной сходимости.

Тема 3. Рациональные сплайн-функции.

Вопросы существования рациональных интерполяционных сплайн-функций.

Оценки скорости сходимости в зависимости от гладкости приближаемой функции.

Тема 4. Сплайн-решения дифференциальных уравнений.

Некоторые методы решения начальной и краевых задач при помощи сплайнов.

Тема 5. Понятие о разностных схемах.

Численное дифференцирование. Разностная схема краевой (или начальной) задачи.

Понятие аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.

Тема 6. Методы сплайн-решений дифференциальных уравнений.

Понятие о методе сплайн-коллокации.

Метод аппроксимации сплайнами точного решения дифференциальной задачи.

Вопросы сходимости сплайн-решений.

Тема 7. Формосохраняющие сплайн-интерполяции.

Геометрические характеристики точечных множеств.

Тема 8. Выпуклая сплайн-интерполяция.

Выпуклая интерполяция полиномиальными сплайнами. Трудности невыпуклой интерполяции классическими сплайнами. Применение обобщенных сплайн-функций для невыпуклой интерполяции данных.

Тема 9. Сглаживающие сплайны.

Экстремальные свойства классических сплайнов. Понятие о сглаживающих сплайнах.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины *Сплайн-аппроксимации функций* лежит лекционная система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Учебно-методические пособия для самостоятельной работы:

1. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 120 с.

Задания для самостоятельной работы:

1. Построить кубический полином $P(x)$ такой, что в точках $0, 1/3, 2/3, 1$ он принимает соответственно значения $1, 0, 0, 0$. Эти значения можно взять также в качестве значений функции $f(x)$, равной $-3x + 1$ при $x \in [0, 1/3]$ и равной нулю при $x \in [1/3, 1]$.

Сравните значения производных интерполяционного полинома $P(x)$ и функции $f(x)$ в различных точках отрезка $[0, 1]$.

2. Построить кубический сплайн $S(x)$ такой, что выполняются следующие условия:

1) на отрезке $[0, 1]$ сплайн $S(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно;

2) в точках $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ значения сплайна $S(x)$ совпадают со значениями функции \sqrt{x} .

<i>Разделы и темы для самостоятельного изучения</i>	<i>Виды и содержание самостоятельной работы</i>
Модуль 1. Структура, аппроксимативные свойства и приложения сплайн-функций	
1. Понятие о сплайн-функциях.	Рефераты: 1. Интерполяционные полиномы Лагранжа. 2. Интерполяционные полиномы Эрмита.
2. Полиномиальные сплайны.	Реферат: Эрмитовы сплайны.

3. Рациональные сплайн-функции.	Реферат: Интерполяция рациональными функциями.
4. Сплайн-решения дифференциальных уравнений.	Реферат: Базисные сплайны.
5. Понятие о разностных схемах.	Решение задач и упражнений на оценку погрешности численного дифференцирования.
6. Метод сплайн-коллокации.	Реферат: Численное решение уравнения Рикатти.
7. Формосохраняющие сплайн-интерполяции	Реферат: Монотонная интерполяция полиномиальными сплайнами.
8. Выпуклая сплайн-интерполяция.	Реферат: Выпуклая интерполяция параболическими сплайнами.
9. Сглаживающие сплайны.	Реферат: Построение сглаживающих сплайнов.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Типовые контрольные задания

Примерные вопросы устного опроса

1. Сплайн-функции, фрагменты, гладкость.
2. Интерполяционные сплайны.
3. Глобальные и локальные сплайны.
4. Линейные, параболические и кубические сплайны.
5. Существование и единственность рациональных интерполяционных сплайн-функций.
6. Понятие численного дифференцирования.
7. Разностные аппроксимации производных различных порядков.
8. Понятие о методе сплайн-коллокации. Применение разных фрагментов.
9. Выпуклая интерполяция полиномиальными сплайнами.
10. Экстремальные свойства классических сплайнов.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (зачет) - 100 баллов.

Критерии оценки на зачетах

На *зачете* по учебной дисциплине в *устной* или *письменной* форме проверяется выполнение студентом практической части курса и усвоение учебного материала лекционных и практических занятий. Результаты на зачете оцениваются по 100-балльной системе ориентировочно по следующим критериям:

- 1) от 86 до 100 баллов с учетом степени усвоения, если у студента *высокий уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает четко и логически обоснованно;
- 2) от 66 до 85 баллов с учетом степени усвоения, если у студента *достаточно высокий уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает в основном четко и логически обоснованно, но допускает отдельные неточности.

3) от 51 до 65 баллов с учетом степени усвоения, если у студента *достаточный уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает в основном правильно и в логической последовательности, но допускает отдельные неточности;

4) от 0 до 50 баллов с учетом степени усвоения, если у студента *недостаточный уровень* знаний по программе курсового экзамена, имеются существенные пробелы в усвоении важных математических понятий программы курса, допускает ошибки в формулировках и доказательствах базовых теорем из программы курса.

При этом выставляется оценка «зачтено» или «незачтено», если набрал выше или, соответственно, ниже 50 баллов.

8. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

а) адрес сайта курса

<http://cathedra.dgu.ru/OfTheDepartment.aspx?id=5>

б) основная литература:

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

в) дополнительная литература:

1. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.
2. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352с.
3. Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12 – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer
4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ
5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучением: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: [http://moodle.dgu.ru/\(\)](http://moodle.dgu.ru/).

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Учебная программа по дисциплине *Сплайн-аппроксимации функций* распределена по темам и по часам на лекции; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу

(учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачета.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине *Слайн-аппроксимации функций* рекомендуются:

- компьютерные технологии, основанные на операционных системах *Windows, Ubuntu, Linux*;
- прикладные программы *Matlab International Academic Edition Individual, Mathcad Academic*;
- электронный периодический справочник «*Система Гарант*»;
- справочная правовая система «*КонсультантПлюс*».

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой оборудованных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины *Слайн-аппроксимации функций*. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.