МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

**Рабочая программа дисциплины**

***Теория приближений и экстремальные задачи***

Кафедра *математического анализа*
факультета *математики и компьютерных наук*

Образовательная программа магистратуры
*01.04.01 Математика*

Направленность (профиль) подготовки
*Математический анализ*

Форма обучения
*очная*

-

Статус дисциплины: *часть ОПОП, формируемая участниками образовательных отношений; модуль профильной направленности*

Махачкала, 2022

Рабочая программа дисциплины *Теория приближений и экстремальные задачи* составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО - магистратура по направлению подготовки *01.04.01 Математика* от 10.01. 2018 г. № 12.

Разработчик*: кафедра математического анализа,*
*Ибрагимова Б.М., к.ф.-м.н., ст. преп.*

Рабочая программа дисциплины одобрена:

*на заседании кафедры математического анализа*
*от 22 марта 2022 г., протокол № 7.*

*Зав. кафедрой* ________________ *Рамазанов А.-Р.К.*

*на заседании методического совета факультета математики и компьютерных наук*
*от 23 марта 2022 г., протокол № 4.*

*Председатель* ________________ *Ризаев М.К.*

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» 03 2022 г.

Начальник УМУ ________________ Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *Теория приближений и экстремальные задачи* входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений (модуль профильной направленности), образовательной программы магистратуры по направлению 01.04.01 Математика.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук кафедрой математического анализа.*

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с приближенным представлением функций полиномами, рациональными дробями, сплайнами, а также с методами исследования экстремальных задач теории наилучших приближений в различных метриках.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
*общепрофессиональных – ОПК-1;*
*профессиональных – ПК-1, ПК-2.*

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

*знать:* различные аппараты приближения функций; постановку задачи наилучшего приближения в данном метрическом пространстве; основные свойства элементов наилучшего приближения; свойства полиномов Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля;

*уметь:* применять прямые и обратные теоремы теории приближения в задачах сжатия и восстановления информации, в приближенных вычислениях интегралов и других задачах прикладной математики для оценки погрешностей вычислений; оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса дисциплины; устанавливать связи между различными предметными разделами;

*владеть:* методами теории приближения в различных метриках для решения экстремальных задач в математике и в других областях научно-исследовательской деятельности; методикой изложения основного материала того или иного раздела теории приближения функций и теории экстремальных задач.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение контроля успеваемости в форме *коллоквиума* и промежуточного контроля в форме *экзамена.*

Объем дисциплины 5 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

<table>
<tr><th rowspan="4">Семестр</th><th colspan="8">Учебные занятия на очном отделении</th><th rowspan="4">Форма промежуточной аттестации</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Всего</th><th colspan="6">Контактная работа обучающихся с преподавателем</th><th rowspan="3">СРС, в том числе экзамен</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Всего</th><th colspan="5">из них</th></tr>
<tr><th>Лекции</th><th>Лабораторные занятия</th><th>Практические занятия</th><th>КСР</th><th>Консультации</th></tr>
<tr><td>2</td><td>180</td><td>92</td><td>48</td><td>-</td><td>44</td><td>-</td><td>-</td><td>52+36</td><td>экзамен</td></tr>
</table>

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины *<u>Теория приближений и экстремальные задачи</u>* являются:
- освоение основных понятий, связанных с экстремальными задачами теории приближения (наилучшее приближение, модули непрерывности, поперечники, энтропия и емкость компактного множества, прямые и обратные теоремы теории приближения);
- творческое овладение основными методами исследования экстремальных задач теории приближения.

**2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры**

Дисциплина *Теория приближений и экстремальные задачи* входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений (модуль профильной направленности), образовательной программы магистратуры по направлению 01.04.01 Математика.

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

Изучение данной дисциплины предполагает хорошее знание основных разделов математического анализа, функционального анализа, комплексного анализа, теории меры, линейной алгебры.

**3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения)**

| Код и наименование компетенции из ФГОС ВО | Код и наименование индикатора достижения компетенций | Планируемые результаты обучения | Процедура освоения |
|---|---|---|---|
| ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики | ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук. | *Знает:* теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики.<br>*Умеет:* решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их | Устный опрос, контрольные работы |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.<br>*Владеет:* базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. | |
| | ОПК-1.2.Умеет использовать базовые знания в области математики в профессиональной деятельности. | *Знает:* способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.<br>*Умеет:* применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.<br>*Владеет:* навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. | Устный опрос, контрольные работы |
| | ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний. | *Знает:* различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.<br>*Умеет:* корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и | Устный опрос, контрольные работы |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | естественных наук.<br>*Владеет:* навыками выбора<br>методов решения задач современного математического анализа. | |
| ПК-1. Способен понимать и применять в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение, операционные системы и сетевые технологии. | ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. | *Знает:* основы математического анализа и различные приложения дифференциального и интегрального исчисления в математических и естественных науках; современные языки программирования и современные информационные технологии.<br>*Умеет:* применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных языках программирования.<br>*Владеет:* базовыми методами дифференциального и интегрального исчислений; навыками программирования на современных языках. | Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов. |
| | ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике. | *Знает:* области применения дифференциального и интегрального исчисления; различные языки программирования.<br>*Умеет:* решать задачи, связанные: с исследованием свойств функций и их производных, с изучением функциональных рядов, с оценкой погрешности аппроксимации функций; применять различные | Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | языки программирования в численном анализе.<br>*Владеет:* методами дифференциального исчисления для исследования функций и навыками приложения интегрального исчисления к геометрии, физике.и другим естественным наукам. | |
| | ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике. | *Знает:* методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов; методы исследования сходимости рядов; численные методы анализа; современные информационные технологии.<br>*Умеет:* применять методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов и методы исследования сходимости рядов в численном анализе с использованием современных информационных технологий.<br>*Владеет:* навыками решения задач численного анализа с использованием методов дифференциального и интегрального исчислений. | Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов. |
| ПК-2. Способен владеть навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных | ПК-2.1. Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, формы подготовки научных публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований. | *Знает:* основы использования информационных технологий в науке; основные направления использования информационных технологий в научных исследованиях.<br>*Умеет:* применять современные методы и средства автоматизированного | Устный опрос, контрольные работы |

| | | | |
|---|---|---|---|
| сетях) характера; представления материалов собственных исследований; проводить корректуру, редактирование, реферирование работ. | | анализа и систематизации научных данных; использовать современные информационные технологии для подготовки традиционных и электронных научных публикаций. *Владеет:* навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками применения информационных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах. | |
| | ПК-2.2. Умеет представлять научные результаты, составлять научные документы и отчеты. | *Знает:* основные методы критического анализа и оценки современных научных достижений; методику представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме. *Умеет:* критически анализировать современные научные достижения в области математического анализа. *Владеет:* навыками анализа и оценки современных научных достижений в области математического анализа; навыками перевода научных текстов и современными технологиями научной коммуникации на русском и иностранном языках. | Устный опрос, контрольные работы |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | ПК-2.3. Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками. | *Знает:* основные методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные методы работы по информационным технологиям.<br>*Умеет:* публично представлять результаты научно-исследовательской работы;<br>применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; использовать современные информационные технологии для подготовки научных публикаций; практически использовать образовательные ресурсы Интернет в научно-исследовательской работе.<br>*Владеет:* современными технологиями научной коммуникации;<br>навыками представления научных отчетов и докладов с аргументированным анализом в области математического анализа;<br>навыками использования современных баз данных;<br>навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах. | Устный опрос, контрольные работы |

**4.Объем, структура и содержание дисциплины**

4.1. Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 академических часов.

4.2. Структура дисциплины

| **Названия разделов и тем дисциплины** | **Семестр** | **Неделя семестра** | **Аудиторные занятия, в том числе** | | | | **Самостоят. работа** | **Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | лекции | **практ. занятия** | **лабор. работы** | **Контр. сам. раб.** | | |
| **Модуль 1.** ***Наилучшие приближения*** | | | | | | | | |
| 1. Постановка задачи и свойства наилучшего приближения. | | | 4 | 4 | | | 6 | |
| 2. Различные нормы и метрики. | | | 4 | 4 | | | 6 | |
| 3. Двойственность экстремальных задач в линейных нормированных пространствах. | | | 2 | 2 | | | 4 | |
| ***Всего по модулю 1*** | ***2*** | | ***10*** | ***10*** | | | ***16*** | коллоквиум |
| **Модуль 2.** ***Свойства элемента наилучшего приближения*** | | | | | | | | |
| 1. Характеристические свойства полиномов наилучшего приближения. | | | 4 | 4 | | | 4 | |
| 2. Вопросы единственности и устойчивости полинома наилучшего приближения. | | | 6 | 6 | | | 2 | |
| 3. Характеристические свойства рациональных дробей наилучшего приближения. | | | 4 | 4 | | | 2 | |
| ***Всего по модулю 2*** | ***2*** | | ***14*** | ***14*** | | | ***8*** | коллоквиум |
| **Модуль 3.** ***Прямые и обратные теоремы теории приближения*** | | | | | | | | |
| 1. Приближение полиномами. | | | 6 | 6 | | | 4 | |
| 2. Ряды Фурье как аппарат приближения. | | | 4 | 4 | | | 2 | |
| 3. Обратные теоремы теории приближения. | | | 4 | 4 | | | 2 | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Всего по модулю 3*** | ***2*** | | ***14*** | ***14*** | | | ***8*** | коллоквиум |
| **Модуль 4.** ***Поперечники классов функций*** | | | | | | | | |
| 1**.**Модули непрерывности. | | | 4 | 2 | | | 10 | |
| 2. Поперечники Колмогорова некоторых классов периодических функций. | | | 6 | 4 | | | 10 | |
| ***Всего по модулю 4*** | ***2*** | | ***10*** | ***6*** | | | ***20*** | коллоквиум |
| **Модуль 5.** ***Промежуточная аттестация*** | | | | | | | | |
| Экзамен | **2** | | | | | | | **36** |
| **ИТОГО за семестр** | **2** | | **48** | **44** | | | **52** | **36** |

**4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам *(разделам)***

***4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине***

*Модуль 1. Наилучшие приближения.*
Тема 1. Постановка задачи и свойства наилучшего приближения.
Задачи теории приближения, общие свойства наилучшего приближения.
Тема 2. Различные нормы и метрики.
Равномерные нормы и метрики. Интегральные нормы и метрики. Метрика Хаусдорфа.
Тема 3. Двойственность экстремальных задач в линейных нормированных пространствах.
Теорема Хана-Банаха и отделимость выпуклых множеств. Теоремы двойственности в случае приближения конечномерным пространством. Соотношение двойственности в случае приближения выпуклым замкнутым множеством. Критерии элемента наилучшего приближения, вытекающие из соотношений двойственности. Двойственные соотношения для задач наилучшего приближения в пространствах $L_p(a,b)$, $C[a,b]$.

*Модуль 2. Свойства элемента наилучшего приближения.*
Тема 4. Характеристические свойства полиномов наилучшего приближения.
Теоремы Чебышева и Колмогорова.
Тема 5. Вопросы единственности и устойчивости полинома наилучшего приближения.
Общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения.
Вопрос устойчивости полинома наилучшего приближения.
Тема 6. Характеристические свойства рациональных дробей наилучшего приближения.
Теорема Чебышева и ее следствия.

*Модуль 3. Прямые и обратные теоремы теории приближения.*
Тема 7. Приближение полиномами.
Теорема Ахиезера-Крейна-Фавара. Теоремы Джексона и Корнейчука**.**
Тема 8. Ряды Фурье как аппарат приближения.
Оценки скорости сходимости сумм Фурье, сумм Фейера и сумм Валле-Пуссена.
Тема 9. Обратные теоремы теории приближения. Оценки модулей непрерывности через полиномиальные приближения. Обратные теоремы С.Н.Бернштейна. Обратные теоремы Салема, С.Б.Стечкина, А.Ф.Тимана.

*Модуль 3. Поперечники классов функций.*
Тема 10. Модули непрерывности.
Модули непрерывности первого порядка. Свойства модуля непрерывности первого порядка.

Модули непрерывности высших порядков.
Тема 11. Поперечники Колмогорова некоторых классов периодических функций.
Вводные замечания. Теорема о поперечнике шара. Поперечники классов $W_{L_2}{}^2$ в пространстве $L_2(2\pi)$. Поперечники классов Гельдера в пространстве $C(2\pi)$.

***4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине***
*Модуль 1. Наилучшие приближения.*
Тема 1. Постановка задачи и свойства наилучшего приближения.
Задачи теории приближения, общие свойства наилучшего приближения.
Тема 2. Различные нормы и метрики.
Равномерные нормы и метрики. Интегральные нормы и метрики. Метрика Хаусдорфа.
Тема 3. Двойственность экстремальных задач в линейных нормированных пространствах.
Теорема Хана-Банаха и отделимость выпуклых множеств. Теоремы двойственности в случае приближения конечномерным пространством. Соотношение двойственности в случае приближения выпуклым замкнутым множеством.

*Модуль 2. Свойства элемента наилучшего приближения.*
Тема 4. Характеристические свойства полиномов наилучшего приближения.
Теоремы Чебышева и Колмогорова.
Тема 5. Вопросы единственности и устойчивости полинома наилучшего приближения.
Задачи на исследование существования, единственности и устойчивости элемента наилучшего приближения.
Тема 6. Характеристические свойства рациональных дробей наилучшего приближения.
Задачи на прменение теоремы Чебышева и ее следствий.

*Модуль 3. Прямые и обратные теоремы теории приближения.*

Тема 7. Приближение полиномами.
Задачи на применение теоремы Ахиезера-Крейна-Фавара и теорем Джексона.
Тема 8. Ряды Фурье как аппарат приближения.
Оценки скорости сходимости сумм Фурье, сумм Фейера и сумм Валле-Пуссена.
Тема 9. Обратные теоремы теории приближения. Оценки модулей непрерывности через полиномиальные приближения. Обратные теоремы С.Н.Бернштейна.

*Модуль 3. Поперечники классов функций.*
Тема 10. Модули непрерывности.
Модули непрерывности первого порядка. Свойства модуля непрерывности первого порядка.
Модули непрерывности высших порядков.
Тема 11. Поперечники Колмогорова некоторых классов периодических функций.
Теорема о поперечнике шара. Поперечники классов Гельдера в пространстве $C(2\pi)$.

**5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

*Учебно-методические пособия для самостоятельной работы*

1. Рамазанов А.-Р. К. Классы функций (избранные задачи с краткими решениями). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2000.
2. Загиров Н.Ш., Рамазанов А.-Р. К. Приближение полиномами и рациональными функциями. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1989.

*Задания для самостоятельной работы*

1. Доказать, что любое конечномерное подпространство $F$ линейного нормированного пространства $X$ является множеством существования.
2. Привести пример множества $F$ в линейном нормированном пространстве $X$, которое не является множеством существования.
3. Доказать, что любое замкнутое локально-компактное множество $F$ линейного нормированного пространства $X$ является множеством существования.
4. Доказать, что $\|\cdot\|$ строго выпукла тогда и только тогда, когда единичная сфера $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ в $X$ не содержит отрезков.
5. Привести примеры строго выпуклых и не строго выпуклых норм в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C([0,1])$ $L_p([0,1])$ $p \geq 1$, $L_\infty([0,1])$.
6. Доказать, что если множество $F$ является множеством существования в линейном пространстве $X$, норма которого строго выпукла, то множество $F$ является множеством единственности.
7. Доказать, что функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ непрерывен.
8. Доказать, что если $F$ –подпространство, то функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ обладает следующими свойствами:
1) $E(x_1 + x_2, F) \leq E(x_1, F) + E(x_2, F)\ \forall x_1, x_2 \in X$;
2) $E(\lambda x, F) = |\lambda| E(x, F)\ \forall x \in X, \forall \lambda \in R$.
9. Привести примеры пространства $X$ и множества $F$ таких, что функционал наилучшего приближения не является полуаддитивным, положительно однородным.
10. Привести пример линейного пространства $X$ и подпространст,ва $F \subset X$ таких, что функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ не является аддитивным.
11. Доказать, что если $F$ – конечномерное подпространство в линейном нормированном пространстве $X$ ,то оператор метрического проектирования $P_F$ является непрерывным.
12. Доказать, что если $F$ – подпространство нормированного пространства $X$, то оператор метрического проектирования $P_F$ является однородным.
13. Пусть $X$ – унитарное пространство со скалярным произведением $(x, y)$. Доказать, что норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ превращает $X$ в строго нормированное.
14. Доказать, что всякое подпространство $F$ унитарного пространства $X$ является множеством существования и единственности.
15. Доказать, что оператор метрической проекции $P_F$ на подпространство $F$ унитарного пространства $X$ является линейным оператором и для любого $x \in X$ наилучший элемент

$P_F(x)$ для $x$ в подпространстве $F$ такой, что $x - P_F(x)$ ортогонален любому вектору из $F$.

16. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – векторы унитарного пространства $X$. Доказать, что если система $(x_k) \quad (k = \overline{1,n})$ линейно независима, то для любого вектора $x \in X$

$$E(x, L(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \frac{\det G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$ где $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – матрица Грамма.

17. Доказать, что если $X$ – унитарное пространство, то:

1) система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима, тогда и только тогда, когда $\det G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$

2) для любой системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ $\det G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$.

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависима.

Указанное неравенство является обобщением неравенства Коши-Буняковского;

3) для любой линейно независимой системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и для любого $m$, $1 \leq m \leq n$.

$$\det G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \det G(x_1, x_2, \ldots, x_m) \det G(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

Доказать, что знак равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда всякий вектор $x_k, k \leq m$, ортогонален всякому вектору $x_l, m \leq l \leq n$;

4) для любой системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

$$\det G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (x_1, x_1)(x_2, x_2)\ldots(x_n, x_n).$$

18. Пусть $A = (a_{ij})$– квадратная матрица порядка $n \in N$ с комплексными элементами.

Доказать, что $|\det A|^2 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} |a_{1k}|\right|^2 \left|\sum_{k=1}^{n} |a_{2k}|\right|^2 \ldots \left|\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|\right|^2$.

Доказать, что знак равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда для любых $i, j = 1,2,...,n, i \neq j$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overline{a}_{jk} = 0$.

Это неравенство называется неравенством Адамара.

19. Пусть $a$ и $b$ – фиксированные действительные числа, $n \in N$. Среди всех тригонометрических полиномов $T_n(x) = a \cos nx + b \sin nx + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ найти тот, для которого интеграл $\int_0^{2\pi} |T_n(x)|^p \, dx, \; p \geq 1$, принимает наименьшее значение.

20. Пусть $f \in C[a,b]$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $P(x)$, что $|f(x) - P(x)| < \varepsilon \; \forall x \in [a,b]$ (первая теорема Вейерштрасса).

21. Пусть $f \in C[2\pi]$. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ тригонометрический полином $T(x)$ такой, что $|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (вторая теорема Вейерштрасса).

22. Вывести из первой теоремы Вейерштрасса вторую и наоборот.
23. Сформулировать и доказать утверждения аналогичные тем, которые сформулированы в задачах 20 и 21 для пространств $L_p([a,b]),\ p\ge 1$ и $L_p(2\pi),\ p\ge 1$

25. Найти наилучшее равномерное приближение функции $(x-a)^{-1}, a>1$ на отрезке $[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени $n$.
26. Пусть $a$ и $b$ – фиксированные действительные числа, $n\in N$. Среди тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\cos kx+b_k\sin kx$ найти полином наилучшего равномерного приближения функции $f(x)=a\cos nx+b\sin nx$.
27. Пусть $0<a<1$, $b$ – нечетное число, большее $1$. Для функции Вейерштрасса $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} a^m\cos b^m x$ найти наилучшее равномерное приближение тригонометрическими полиномами $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

28. Числа $K_r=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^{(r+1)j}\dfrac{1}{(2j+1)^{r+1}}\ (r=1,2\ldots)$ называются константами Фавара.

1) Найти $K_1, K_2, K_3, K_4$.

2) Доказать, что $\lim\limits_{r\to\infty} K_r=\dfrac{4}{\pi}$.

29. Пусть $T_n(x)=\dfrac{u_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ – тригонометрический полином. Доказать, что:

1) $T_n(x)=a_n\cos nx+\dfrac{\cos nx}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k ctg\,\dfrac{x-x_k}{2}T_n(x_k)$, где $x_k, k=1,2,\ldots 2n$ – нули полинома $\cos nx=A\prod\limits_{k=1}^{2n}\sin\dfrac{x-x_k}{2}$.

2) $T'(0)=\dfrac{1}{4n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}T_n(x_k)$, $x_k$ –нули $\cos nx$.

3) $T_n'(x)=\dfrac{1}{4n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}T_n(x+x_k)$, $x_k$ - нули $\cos nx$.

(эту формулу называют интерполяционной формулой М.Рисса);

4) $n=\dfrac{1}{4n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}$, $x_k$ - нули $\cos nx$.

30. Доказать, (см. обозначения в задаче 29) что:

1) $\max\left|T_n{}'(x)\right| \le n\cdot\max\left|T_n(x)\right|$.

2) $\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|T_n{}'\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le n\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|T_n(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad p\ge 1$.

Доказать, что эти неравенства точные. Они называются неравенствами С.Н.Бернштейна.

*Рефераты и доклады по темам для самостоятельной работы*

| **Названия разделов и тем дисциплины** | **Виды и содержание самостоятельной работы** |
|---|---|
| **Модуль 1. Наилучшие приближения** | |
| 1. Постановка задачи и свойства наилучшего приближения. | Решение задач и упражнений. |
| 2. Различные нормы и метрики. | Доклад: Метрика Хаусдорфа. |
| 3. Двойственность экстремальных задач в линейных нормированных пространствах. | Решение задач и упражнений. |
| **Модуль 2. *Свойства элемента наилучшего приближения*** | |
| 1. Характеристические свойства полиномов наилучшего приближения. | Доклад: Полиномы Чебышева. |
| 2. Вопросы единственности и устойчивости полинома наилучшего приближения. | Решение задач и упражнений. |
| 3. Характеристические свойства рациональных дробей наилучшего приближения. | Доклад: Задачи Золотарева. |
| **Модуль 3. *Прямые и обратные теоремы теории приближения*** | |
| 1.Приближение полиномами. | Доклад: Операторы Джексона |
| 2. Ряды Фурье как аппарат приближения. | Доклад: Операторы Фейера, Валле-Пуссена. |
| 3. Обратные теоремы теории приближения. | Доклад: Неравенства С.Н.Бернштейна и А.А.Маркова. |
| **Модуль 4. *Поперечники классов функций*** | |
| 1.Модули непрерывности | Доклад: Обобщенные модули непрерывности в теории приближений. |
| 2. Поперечники Колмогорова некоторых классов периодических функций | Доклад: Модули непрерывности и функции Стеклова. |

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Типовые контрольные задания

*Примерные вопросы к коллоквиуму*

1. Наилучшее приближение. Основные свойства наилучшего приближения.
2. Критерий наилучшего приближения в пространстве $C(2\pi)$.
3. Критерий наилучшего приближения в пространстве $L_p(2\pi)$ $(p\ge 1)$.
4. Прямые теоремы наилучшего приближения в пространствах $C(2\pi)$, $L_p(2\pi)$.

5. Обратные теоремы наилучшего приближения в пространствах $C(2\pi)$, $L_p(2\pi)$.
6. Точная константа в неравенстве Джексона для функций пространства $L_2(2\pi)$.
7. Точная константа в неравенстве Джексона для функций пространства $C(2\pi)$.
8. Теорема о поперечнике шара.
9. Поперечники классов $W_{L_2}^{\ 2}$ в пространстве $L_2(2\pi)$.
10. Операторы Джексона, Фейера, Валле-Пуссена.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

*Критерии оценки по коллоквиуму*
*По данному модулю* студенту выставляются:
1) 10 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* их иллюстрировать на различных примерах;
2) 20 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать различные из них;
3) 30 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать их.
Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.
*Критерии оценки по контрольной работе*
Если студент *владеет по данному модулю навыками* решения типичных задач, то *по этому модулю* ему выставляются:
1) 30 *баллов;*
*2) 20 баллов в случае наличия неточностей;*
*3) 10 баллов в случае наличия некоторых допустимых ошибок.*
Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.
*Критерии оценки по тестированию*
Если студент *умеет* давать *анализ теста* по данному модулю, то *по этому модулю* ему выставляются: *10 баллов за удовлетворительный анализ, 20 баллов за достаточно полный анализ, 30 баллов за глубокий анализ,* которые учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.
*Критерии оценки на экзаменах*
*Экзамены* проводятся в соответствии с положением о курсовых экзаменах, как правило, по заранее подготовленным и утвержденным экзаменационным билетам.
В билет рекомендуется включать не менее двух вопросов учебной программы курса, а также при необходимости можно включить задачи и примеры. Результаты курсового экзамена оцениваются по 100-балльной системе ориентировочно по следующим критериям:
1) оценка «отлично», если у студента от 86 до 100 баллов с учетом степени усвоения, *высокий уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает четко и логически

обоснованно;

2) оценка «хорошо», если у студента от 66 до 85 баллов с учетом степени усвоения, *достаточно высокий уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает в основном четко и логически обоснованно, но допускает отдельные неточности.

3) оценка «удовлетворительно», если у студента от 51 до 65 баллов с учетом степени усвоения, *достаточный уровень* знаний по программе курсового экзамена, отвечает в основном правильно и в логической последовательности, но допускает отдельные неточности;

4) оценка «неудовлетворительно», если у студента от 0 до 50 баллов с учетом степени усвоения, *недостаточный уровень* знаний по программе курсового экзамена, имеются существенные пробелы в усвоении важных математических понятий программы курса, допускает ошибки в формулировках и доказательствах базовых теорем из программы курса.

**8. Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

***а) адрес сайта курса***

*http://cathedra.dgu.ru/OfTheDepartment.aspx?id=5*

***б) основная литература:***

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения - Москва: Наука, 1976
Корнейчук, Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук ; ред. Б.И. Голубова, Г.Я. Пироговой. - Москва : Наука, 1976. - 320 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456961 ().

2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике - Москва: Наука, 1976
Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден ; пер. с англ. под ред. С.М. Ермакова. - Москва : Наука, 1976. - 568 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459751 ().

3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами - Москва: Наука, 1977
Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами / В.К. Дзядык ; ред. В.В. Абгарян, Л.В. Тайкова. - Москва : Наука, 1977. - 512 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456951 ().

4. Даугавет,И.К. Введение в теорию приближения функций : Учебное пособие / Даугавет,Игорь Карлович. - Л. : Изд-во Ленингр.ун-та, 1977. - 184с.:граф. - 00-61.

***в) дополнительная литература:***

1. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация - Москва: Мир, 1975
Лоран, П.Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.Ж. Лоран ; под ред. Г.Ш. Рубинштейн, Н.Н. Яненко ; пер. с фр. Ю.С. Завьялова, Р.А. Звягиной и др. - Москва : Мир, 1975. - 495 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457011 ().

2. Корнейчук, Н.П.Точные константы в теории приближения / Корнечук, Николай Павлович.- М.: Наука, 1987. – 422.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. - Изд. 2-е перераб. и доп. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. - 407с. : граф. - 1-38.

**9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. http://elibrary.ru – eLIBRARY – Научная электронная библиотека

2. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12 – Единое окно доступа к электронным ресурсам

3. http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/ - платформа ресурсов издательства Springer

4. http://edu.dgu.ru/ - Образовательный сервер ДГУ

5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучением: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: http://moodle.dgu.ru/().

**10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по дисциплине распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к докладу или реферату, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

**11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

**12.Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Университет обладает достаточной базой оснащенных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.