МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Кафедра: ***дифференциальных уравнений и функционального анализа***
Факультете: ***математики и компьютерных наук***

Образовательная программа
01.03.01 Математика

Профили подготовки
«*Вещественный, комплексный и функциональный анализ*»

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Форма обучения:
очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП,
фундаментальный модуль ОПОП

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата) от 10.01.2018 №8 (с изменениями №1456 от 26.11.2020)

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,

Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент:

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. Кафедрой ________ Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол № 7

Председатель ______________ Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ ______________ Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в базовую часть образовательной программы бакалавриата по направлению **01.03.01 Математика.**

Дисциплина реализуется на *факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.*

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с банаховыми и гильбертовыми пространствами, операторами, действующими в них; изучение и освоение таких базовых понятий как полнота и сепарабельность метрических и линейно нормированных пространств, компактность множеств, ряды Фурье в гильбертовых пространствах; изучение фундаментальных свойств линейных операторов; построение и основные свойства меры и интеграла Лебега; свойства классических функциональных пространств.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
универсальная компетенция (УК): УК-1;
общепрофессиональная компетенция (ОПК): ОПК-1;
профессиональная компетенция (ПК): ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *2-х письменных работ и 4-х коллоквиумов и 2-х экзаменов*.
Объем дисциплины 7 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия							Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС, в том числе экзамен	
		из них						
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации		
5	144	28	0	28			52+36	Экзамен
6	108	26	0	26			20+36	Экзамен
Итого	252	54	0	54			72+72	

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины *функциональный анализ* являются:

– овладение основными понятиями функционального анализа (полнота, сепарабельность, компактность, линейно нормированные и гильбертовы пространства, линейные операторы);

– овладение тремя основными принципами линейного функционального анализа (теорема о продолжении линейного функционала, теорема о равномерной ограниченности, теорема о открытом отображении);

– овладение основными понятиями и методами теории меры и интеграла Лебега;

– овладение основными методами функционального анализа и умения применять их при решении различных задач из других разделов математики и естествознания;

– дальнейшее повышение математической культуры студентов.

2.Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *функциональный анализ* входит в базовую часть образовательной программы по направлению *01.03.01 Математика*.

Знания по функциональному анализу студентам необходимы при изучении таких последующих университетских курсов, как дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, уравнения в частных производных, теория вероятностей, численные методы, методы оптимизации.

Функциональный анализ рассчитан на студентов третьего курса. Предполагается, что за первые два года студент уже знает:

1) линейную алгебру;
2) основы действительного анализа;
3) элементы теории метрических пространств, которые обычно сообщаются в курсе математического анализа;
4) топологию;
5) обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для ФАН настоящая потребность в комплексном анализе появляется в середине курса, при изучении спектров. Особа связь между ФАН и УЧП, если пользоваться ФАН при изложении УЧП.

Тем не менее, изложение некоторых вопросов функционального анализа должно предшествовать независимое и замкнутое изложение соответствующих связей из других дисциплин (скажем из топологии и алгебры) так как это нужно для функционального анализа.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Код и наименование компетенции из ОПОП	**Код и наименование индикатора достижения компетенций**	**Планируемые результаты обучения**	**Процедура освоения**

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	**Знает:** структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач. **Умеет:** анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. **Владеет:** навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин	Конспектирование и проработка лекционного материала. Участие в практических занятиях. Подготовка рефератов. Самостоятельная работа.
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	**Знает:** принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. **Умеет:** системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. **Владеет:** навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок	
	УК-1.3 Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.	**Знает:** современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет. **Умеет:**	

		применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога. **Владеет:** навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.	
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	**Знает:** теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики. **Умеет:** решать задачи, связанные с	Конспектирование и проработка лекционного материала. Устный опрос. Коллоквиум. Контрольная работа Самостоятельная работа.

		исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами. **Владеет:** базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач	
	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности	**Знает:** способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. **Умеет:** применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. **Владеет:** навыками применения методов овременного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук	

	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	**Знает:** различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. **Умеет:** корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. **Владеет:** навыками выбора методов решения задач современного математического анализа	
ПК-3 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-3.1. Знает основы современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	**Знает:** разные подходы к определению основных понятий математики; основные понятия информатики; формулировки математических утверждений при различных изменениях их исходных условий; различные языки программирования; **Умеет:** устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики и информатики необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. **Владеет:** определенными навыками планирования и проведения работы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию данных современных научных исследований, необходимых	Конспектирование и проработка лекционного материала. Устный опрос. Коллоквиум. Контрольная работа Самостоятельная работа.

		для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	
	ПК-3.2. Планирует популярные лекции, экскурсии и другие виды деятельности необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	**Знает:** разнообразные формы пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики. **Умеет:** планировать изложение различных базовых вопросов изучения математики и информатики в доступной для данной аудитории форме. **Владеет:** определенным опытом планирования и проведения экскурсий для пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики	
	ПК-3.3. Проводит необходимую работу по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	**Знает:** современные методы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. **Умеет:** привлечь внимание обучающихся к математическим и компьютерным наукам. **Владеет:** навыками проведения работы по собиранию,	

		обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 7, академических часов 252.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	**Семестр**	**Неделя семестра**	**Аудиторные занятия, в том числе**				**Самостоят. работа**	**Формы текущего контроля успеваемости** ***(по неделям семестра)*** **Форма промежуточной аттестации** ***(по семестрам)***
			лекции	**практ. занятия**	**лабор. работы**	**Контр. сам. раб.**		
Первый семестр								
Модуль 1. Интеграл Лебега								
Всего по модулю 1	**5**		***10***	***10***			***16***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Мера Лебега и его свойства			2	2			4	
2. Измеримые множества и функции			2	2			4	
3. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере			4	4			6	
4. Теорема Фубини о повторном интеграле			2	2			2	
Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах								
Всего по модулю 2	**5**		***8***	***8***			***20***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Метрические пространства			4	4			4	
2. Теорема Хана-Банаха о и отображение двойственности			2	2			8	

3. Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы			2	2			8	
Модуль 3. ***Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье***								
Всего по модулю 3	***5***		***10***	***10***			***16***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства			2	2			2	
2. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства			2	2			2	
3. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве			2	2			2	
4. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм гильбертовых пространств			2	2			4	
5. Преобразование Фурье и теорема Планшереля			2	2			6	
Модуль 4. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 5 семестр			**28**	**28**			**52**	**36**
Второй семестр								
Модуль 1. Ограниченные операторы. Компактные множества								
Всего по модулю 1	***6***		***12***	***12***			***12***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности			2	2				
2. Сильная и слабая сходимость.			2	2			2	
3. Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр ограниченного оператора			2	2			4	
4. Компактные множества. Критериий компактности Хаусдорфа и ее следствия.			2	2			4	
5. Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p			2	2				
6. Слабо компактные множества и их свойства			2	2			2	
Модуль 2. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами								
Всего по модулю 2	***6***		***14***	***14***			***8***	Контрольная работа, коллоквиум

1. Компактные операторы и их свойства.			4	4				
2.Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора.			2	2			2	
3.Линейные операторные уравнения в (B)-пространстве с вполне непрерывными операторами.			4	4			2	
4.Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта. Штурма-Лиувилля			2	2			2	
5.Интегральные операторы Фредгольма			2	2			2	
Модуль 3. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 6 семестр			**26**	**26**			**20**	**36**
ИТОГО			**54**	**54**			**72**	**72**

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Первый семестр

Модуль 1. Интеграл Лебега

Тема 1: «Мера Лебега и его свойства»

Лекция №1:

1) Основные классы подмножеств данного множества
2) Конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множества меры
3) Продолжение меры на кольцо.
4) Внешняя мера, μ-измеримые множества и теорема Каратеодори об μ-измеримых множествах.
5) Продолжение меры по Лебегу и Жордану.

Тема 2: «Измеримые множества и функции»

Лекция №2:

1) Измеримые множества и их свойства.
2) Борелевские множества.
3) Множества меры нуль.
4) Измеримые функции и их свойства.
5) Различные типы сходимости функций и связь между ними
6) Теоремы Егорова и Лузина.

Тема 3: <u>«Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере»</u>

Лекция №3:

1) Интеграл по счетно-аддитивной мере.
2) Счетная аддитивность интеграла Лебега.
3) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
4) Теорема Радона-Никодима.

Лекция №4:

1) Теорема о монотонной сходимости.
2) Лемма Фату.
3) Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
   Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Тема 4: <u>«Теорема Фубини о повторном интеграле»</u>

Лекция №5:

1) Произведение мер.
2) Теорема Фубини.
3) Теорема Тонелли.

Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах

Тема 1: «Метрические пространства»

Лекция № 6:

1) Метрические пространства.
2) Примеры метрических пространств.
3) Сходимость в метрическом пространстве.
4) Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве и их свойства.
5) Всюду и нигде не плотные множества.

Лекция № 7:

1) Фундаментальные последовательности.
2) Полные метрические пространства.
3) Теорема о пополнении метрических пространствах.
4) Теорема о вложенных шарах.
5) Неподвижные точки отображений.
6) Сжимающие отображения.
7) Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
8) Приложения теоремы Банаха о сжимающих отображениях.

Тема 2: «Теорема Хана-Банаха и отображение двойственности»

Лекция № 8:

1) Линейно нормированные и банаховы пространства.
2) Примеры линейно нормированных и банаховых пространств.
3) Линейные операторы и их непрерывность.
4) Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по
5) Непрерывности в (B) - пространствах
6) Теорема Хана-Банаха о продолжении.
7) Сопряженное пространство.

Тема 2: «Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы»

Лекция № 9:

1) Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^*$.
2) Биортогональные системы.
3) Отображения двойственности и рефлексивные пространства.
4) Неравенства Гельдера и Минковского для рядов и интегралов
5) Лебеговы пространства $L_p(X)$ ($1 \le p \le \infty$).
6) Сопряженное пространство $Lp^*(X)$ ($1 \le p \le \infty$).
7) Сопряженные линейные операторы

Модуль 3. Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье

Тема 1: «Предгильбертовы и гильбертовы пространства»

Лекция № 10:

1) Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
2) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
3) Неравенства Коши-Буняковского.
4) Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.

Тема 2: «Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства»

Лекция № 11:

1) Ортогональность в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональное дополнение.
3) Теорема об ортогональном разложении.

Тема 3: «Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».

Лекция № 12:

1) Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте

Тема 4: «Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм в гильбертовых пространствах»

Лекция № 13:

1) Ортогональные системы.
2) Неравенства Бесселя и теорема Пифагора.
3) Условие замкнутости.
4) Теорема Стеклова о полноте
5) Изоморфизм и изометрия.
6) Теорема Рисса-Фишера об изометричном изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
7) Изоморфизм гильбертовых пространств. Условие замкнутости

Тема 5: «Преобразование Фурье и теорема Планшереля»

Лекция № 14:

1) Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$.
2) Свойства преобразования Фурье.
3) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$.
4) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$.
5) Основные свойства преобразования Фурье в $L_2(R^n)$.
6) Теорема Планшереля об операторе Фурье.
7) Приложение преобразования Фурье при решении дифференциальных уравнений.

Второй семестр

Модуль 1. Ограниченные операторы. Компактные множества

Тема 1: «Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности»

Лекция №1:

1) Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве
2) Некоторые приложения теоремы Бэра.
3) Сильная и слабая сходимость операторов.
4) Принцип равномерной ограниченности для линейных ограниченных операторов.
5) Приложения теоремы о равномерной ограниченности.

Тема 2: «Сильная и слабая сходимость»

Лекция №2:

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Слабая* сходимость функционалов.

Тема 3: «Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр линейного оператора»

Лекция №3:

1) Принцип открытости линейного оператора.
2) Теорема об обратном операторе.
3) Приложения теоремы об обратном операторе.
4) Спектр ограниченного оператора.

Тема 4: «Компактные множества. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствия»

Лекция №4:

1) Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве.
2) Основные свойства компактных множеств.
3) Вполне ограниченные множества.
4) Критерий компактности Хаусдорфа .
5) Следствия теоремы Хаусдорфа.

Тема 5: «Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p»

Лекция №5:

1) Критерий компактности множества в C(X).
2) Критерий компактности множества в пространствах l_p и $L_p(X)$ ($1 \le p \le \infty$).

Тема 6: «Слабо компактные множества и их свойства»

Лекция №6:

1) Слабо* компактные множества и их свойства.
2) Критерий слабой* компактности множества K E*, где E* - сопряженное пространство (B)-пространства E.

Модуль 2. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами

Тема 1: «Компактные операторы и их свойства»

Лекция №7:

1) Компактные операторы.
2) Основные свойства линейных компактных операторов.

Лекция №8:

1) Свойства линейных компактных операторов.
2) Примеры линейных компактных операторов.

Тема 2: «Теорема Рисс-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора»

Лекция №9:

1) Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в
2) Следствия теоремы Рисса-Шаудера.

Тема 3: «Линейные уравнения в (B)-пространствах с вполне непрерывными операторами»

Лекция №10:

1) Постановка задачи.
2) Нетеровы операторы.

Лекция №11:

1) Теоремы Фредгольма.
2) Примеры уравнений с вполне непрерывным оператором.

Тема 4: «Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта»

Лекция №12:

1) Эрмитовы операторы.
2) Основные свойства эрмитовых операторов.

Тема 4: «Интегральные операторы Фредгольма»

Лекция №13:

1) Интегральные операторы Фредгольма
2) Задача Штурма-Лиувилля.

4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине

Первый семестр

Тема 1: «Мера Лебега и его свойства»

Практическое занятие №1:

1) Основные классы подмножеств данного множества
2) Конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множества меры
3) Продолжение меры на кольцо.

Тема 2: «Измеримые множества и функции»

Практическое занятие №2:

1) Измеримые множества и их свойства.
2) Борелевские множества.
3) Множества меры нуль.
4) Измеримые функции и их свойства.
5) Различные типы сходимости функций и связь между ними

Тема 3: «Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере»

Практическое занятие №3:

1) Интеграл по счетно-аддитивной мере.
2) Счетная аддитивность интеграла Лебега.
3) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Практическое занятие №4:

1) Теорема о монотонной сходимости.
2) Лемма Фату.
3) Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Тема 4: «Теорема Фубини о повторном интеграле»

Практическое занятие №5:

1) Произведение мер.
2) Теорема Фубини.
3) Теорема Тонелли.

Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах

Тема 1: «Метрические пространства»

Практическое занятие № 6:

1) Примеры метрических пространств.
2) Сходимость в метрическом пространстве.
3) Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве и их свойства.
4) Всюду и нигде не плотные множества.

Практическое занятие № 7:

1) Фундаментальные последовательности.
2) Примеры полных метрических пространств.
3) Неподвижные точки отображений.
4) Сжимающие отображения.

Тема 2: «Теорема Хана-Банаха и отображение двойственности»

Практическое занятие № 8:

1) Полунорма и норма в линейном пространстве.
2) Линейно нормированные и банаховы пространства.
3) Примеры линейно нормированных и банаховых пространств.
4) Линейные операторы и их непрерывность.
5) Сопряженное пространство.

Тема 3: «Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы»

Практическое занятие № 9:

1) Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^*$.
2) Биортогональные системы.
3) Отображения двойственности и рефлексивные пространства.
4) Сопряженные линейные операторы

Модуль 3. Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье

Тема 1: «Предгильбертовы и гильбертовы пространства»

Практическое занятие № 10:

1) Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
2) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
3) Неравенства Коши-Буняковского.
4) Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.

Тема 2: «Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства»

Практическое занятие № 11:

1) Ортогональность в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональное дополнение.
3) Теорема об ортогональном разложении.

Тема 3: «Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».

Практическое занятие № 12:

1) Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте

Тема 4: «Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм в гильбертовых пространствах»

Практическое занятие № 13:

1) Ортогональные системы.
2) Неравенства Бесселя и теорема Пифагора.

3) Условие замкнутости.
4) Теорема Стеклова о полноте
5) Изоморфизм и изометрия.
6) Теорема Рисса-Фишера об изометричном изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
7) Изоморфизм гильбертовых пространств. Условие замкнутости

Тема 5: «Преобразование Фурье и теорема Планшереля»

Практическое занятие № 14:

1) Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$.
2) Свойства преобразования Фурье.
3) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$.

Второй семестр

Модуль 1. Ограниченные операторы. Компактные множества

Тема 1: «Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности»

Практическое занятие №1:

1) Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве
2) Некоторые приложения теоремы Бэра.

Тема 2: «Сильная и слабая сходимость»

Практическое занятие №2:

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Слабая* сходимость функционалов.

Тема 3: «Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр линейного оператора»

Практическое занятие №3:

1) Теорема об обратном операторе.
2) Приложения теоремы об обратном операторе.
3) Спектр ограниченного оператора.

Тема 4: «Компактные множества. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствия»

Практическое занятие №4:

1) Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве.
2) Основные свойства компактных множеств.
3) Вполне ограниченные множества.
4) Критерий компактности Хаусдорфа .
5) Следствия теоремы Хаусдорфа.

Тема 5: «Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p»

Практическое занятие №5:

1) Критерий компактности множества в C(X).

2) Критерий компактности множества в пространствах l_p и $L_p(X)$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Тема 6: «Слабо компактные множества и их свойства»

Практическое занятие №6:

1) Слабо* компактные множества и их свойства.
2) Критерий слабой* компактности множества К Е*, где Е* - сопряженное пространство (В)-пространства Е.

Модуль 2. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами

Тема 1: «Компактные операторы и их свойства»

Практическое занятие №7:

1) Компактные операторы.
2) Основные свойства линейных компактных операторов.
3) Примеры линейных компактных операторов.

Практическое занятие №8:

1) Примеры линейных компактных операторов.

Тема 2: «Теорема Рисс-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора»

Практическое занятие №9:

1) Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в
2) Следствия теоремы Рисса-Шаудера.

Тема 3: «Линейные уравнения в (В)-пространствах с вполне непрерывными операторами»

Практическое занятие №10:

1) Постановка задачи.
2) Нетеровы операторы.

Практическое занятие №11:

1) Теоремы Фредгольма.
2) Примеры уравнений с вполне непрерывным оператором.

Тема 4: «Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта»

Практическое занятие №12:

1) Эрмитовы операторы.
2) Основные свойства эрмитовых операторов.
3) Теорема Гильберта-Шмидта.
4) Операторы Гильберта-Шмидта.

Тема 5: «Интегральные операторы Фредгольма»

Практическое занятие №13:

3) Интегральные операторы Фредгольма
4) Задача Штурма-Лиувилля.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины функциональный анализ лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Учебно-методические пособия для самостоятельной работы

1) Колмогоров,А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.

2) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.

3) Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие / Люстерник Л.А., В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань : Изд. высшая школа, 1982. - 270,[1] с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0976-1: 288-75.

3) Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.

4) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.

Задания для самостоятельной работы

1. Докажите полноту пространства $L_b(R^n, R^n)$.
2. Привести пример последовательности линейных ограниченных операторов $L(H)$, H - гильбертово пространство сходящееся в $L_s(H)$, но не в $L_b(H)$.
3. Найти A^* для $A \in L(R^n, A^n)$.
4. Найти сопряженный оператор для линейного интегрального оператора Фредгольма с непрерывным ядром в пространстве $C_{[a,b]}$.

5. Доказать, что линейный оператор Фредгольма с непрерывным ядром вполне непрерывен в пространстве $C_{[a,b]}$.
6. Приведите примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.

7. Рассмотрим интегральные уравнения Вольтера второго рода

$$X(t) = \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)ds = y(t),$$

где $K(t,s)$ и $y(t)$ непрерывные функции при $a \le s \le t \le b$.

8. Показать, что однородное уравнение Вольтера второго рода не имеет собственных значений.
9. Доказать, что в предгильбертовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

3. Пусть E - вещественное ЛНП и для любых $x, y \in E$ выполняется равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Доказать, что формула

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right\}$$

задает в E скалярное произведение, согласующееся с нормой в E, т.е. такое, что $(x,x) = \|x\|^2$.

10. Сформулируйте альтернативу Фредгольма для линейного интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром в пространстве $C_{[a,b]}$.

Разделы и темы для самостоятельного изучения	**Виды и содержание самостоятельной работы**
Раздел 1. Интеграл Лебега	
1. Мера Лебега и его свойства	Рефераты на темы: 1Основные классы множеств: кольцо, полукольцо, алгебра множеств. 2. Построение меры Лебега в R^1
2. Измеримые множества и функции	Доклады на темы: 1. Борелевские множества. 2. Различные виды сходимости измеримых функций и связь между ними. 3. Теоремы Лузина и Егорова.
3. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере	Доклад на тему: Переход к пределу под знаком интеграла.
4. Теорема Фубини о повторном интеграле	Доклад на тему: Приложения теоремы Фубини.
Раздел 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах	
1. Метрические пространства	Доклад на тему: Метризационные теоремы.
2. Теорема Хана-Банаха о и отображение двойственности	Доклад на тему: Геометрические и аналитические формулировки теоремы Хана-Банаха.

3. Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы	Доклад на тему: Рефлексивность лебеговых пространств.
Раздел 3. *Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье*	
1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства	Реферат на тему: Примеры гильбертовых и предгильбертовых пространств. Решение задач и упражнений.
2. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства	Доклад на тему: Теорема о проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве и некоторые его приложения.
3. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве	Доклад на тему: Значение теоремы Рисса об общем виде линейного функционала.
4. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм гильбертовых пространств	Доклад на тему: Ряды Фурье по различным ортонормированным полным системам в гильбертовом пространстве.
5. Преобразование Фурье и теорема Планшереля	Доклад на тему: Свойства преобразования Фурье.
Раздел 4. Пространства сходимости. Обобщенные функции	
1. Линейные пространства сходимости и им сопряженные	Доклад на тему: Локально выпуклые пространства.
2. Обобщенные функции	Решение задач и упражнений.
Раздел 5. Ограниченные операторы. Компактные множества	
1. Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности	Решение задач и упражнений.
2. Сильная и слабая сходимость.	Доклад на тему: Смысл сильной и слабой сходимостей в конкретных банаховых пространствах
3. Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр ограниченного оператора	Реферат на тему: Приложения теоремы об обратном операторе
4. Компактные множества. Критериий компактности Хаусдорфа и ее следствия.	Доклад на тему: Критерии компактности в некоторых классических пространствах функционального анализа.
5. Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p	Решение задач и упражнений
6. Слабо компактные множества и их свойства	Доклад на тему: Описание слабо компактных множеств в конкретных банаховых пространствах.
Раздел 6. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами	
1. Компактные операторы и их свойства	Решение задач и упражнений.
2.Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора.	Доклад на тему: Разбиение спектра ограниченного оператора.
3.Линейные операторные уравнения в (B)-пространстве с вполне непрерывными операторами.	Доклад на тему: Примеры уравнений, сводимых к операторному уравнению в (B)-пространстве с вполне непрерывными оператормаи.
4.Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта.	Доклад на тему: Операторы Гильберта-Шмидта.
5.Интегральные операторы Фредгольма и задача Штурма-Лиувилля	Доклад на тему: Краевые задачи математической физики, сводимые к изучению интегральных операторов Фредгольма..

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Типовые контрольные задания

7.1.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму

1. Применение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений.
2. Применение принципа сжимающих отображений к решению систем линейных алгебраических уравнений.
3. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений.
4. Применение принципа сжимающих отображений к нахождению пределов последовательностей, заданных рекуррентно.
5. Линейные нормированные пространства, их связь с метрическими.
6. Примеры банаховых пространств.
7. Неравенства Гельдера и Минковского.
8. Пространства $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$, их полнота.
9. Норма в предгильбертовом пространстве. Примеры.
10. Тождество параллелограмма.
11. Непрерывные линейные операторы. Норма оператора.
12. Пространство линейных операторов, его полнота.
13. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор.
14. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.
15. Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах.
16. Универсальность пространства $C_{[0,1]}$.

7.1.2. Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

Какие из следующих утверждений справедливы для операции Δ симметрической разности

a. $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C \cup B)$

b. $A\Delta B \subset (A\Delta C) \not\subset (C \cup B)$

c. $A\Delta B \supset (A\Delta C) \not\subset (C \cup B)$

d. $A\Delta B \subset (A \cap C) \not\subset (C \cup B)$

2. Пусть $A, B \in 2^X$ и $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ - данная последовательность, χ_E – характеристическая функция множества $E \subset X$. Верно ли следующее предложение?

a. $(A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n) \Leftrightarrow (\chi_A\ (x) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x))$

b. $\chi_{A\Delta B}(x) \neq |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$

c. $\chi_{\underline{\lim} A_n}(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \chi_{A_n}(x)$

d. $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sup \chi_{A_n}(x)$

3. Пусть $f : X \to Y$ произвольное отображение и $A_t \in 2^X$, $B_t \in Y$ где $t \in T$ и T - произвольное множество индексов, которое из следующих предложений относятся к образам и прообразам множеств?

a. $f(\bigcup\limits_t A_t) = \bigcup\limits_t f(A_t)$

b. $f(\bigcap_t A_t) = \bigcup_t f(A_t)$

c. $f(A_1) \setminus f(A_2) \not\subset f(A_1 \setminus A_2)$

d. $f^{-1}(\bigcup_t B_t) \neq \bigcup_t f^{-1}(B_t)$

4.Пусть $f: X \to Y$ произвольное отображение X в Y,
$g, h: Y \to X$ - данные отображения, а $f(x) = y, (*)$- данное уравнение. Какое из следующих уравнений верное?

a.Если уравнение (*) имеет решение и $g_0 f = I_x$, то это решение единственно;

b.Если $g_0 f = I_Y$, то уравнение (*) имеет, по крайней мере одно решение

c.Если f имеет обратное отображение, то уравнение (*) имеет решение, но не единственное.

d. $f(X) \in Y$

5. Пусть X - множество прямых l плоскости и пусть $l_1 \equiv l_2 (\mathrm{mod}\, R_a)$ означает, что $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \equiv l_2 (\mathrm{mod}\, R_b)$, означает, что $l_1 \perp l_2$.
Какие из следующих высказываний верны?

a. $X \mid R_a$ - можно отождествить с множеством всех (неориентированных) прямых проходящий через фиксированную точку плоскости

b. R_a - отношение эквивалентности в X

c. R_b- не является отношением эквивалентности в X

d. R_a и R_b- отношение эквивалентности в X

6.Пусть X - произвольное множество, R- отношение эквивалентности в X
Найдите из следующих предложений верное:

a. Всякое разбиение X соответствует некоторому отношению эквивалентности R в X
.

b. Элементы $X \mid R$ образует разбиение

c.Элементы $X \mid R$ не образует разбиение

d. Не всякое разбиение X определяет некоторое отношение эквивалентности R в X.

7. Какое из следующих предложений верно?

a. $(N, \leq)$ (множество натуральных чисел с естественным порядком)

b. $(G, <)$ (множество всех окрестностей фиксированной точки $x \in R^n$, упорядоченное по обратному включению) – направленное множество.

c.Пусть $x \in R^n$ произвольная точка и Λ- множество интервалов I, содержащий точку x с отношением порядка L: «$I_1 < I_2$ означает $I_1 \supset I_2$» $(\Lambda, <)$ не является направленным множеством

d. Множество N нельзя упорядочить

8. В метрическом пространстве (E, ρ), где $\rho(x, y) = \begin{cases} o\, при\, x = y \\ 1\, при\, x \neq y \end{cases}$, какое из следующих предложений верно?

a. Любое подмножество в E одновременно и открыто и замкнуто

b. Одноточечное множество не открыто.

c. Все множества открыты
d. одноточечное множество не открыто и не замкнуто

9. какие из следующих предложений верные?

a. $\forall p \in [1,+\infty]$: (K^n, ρ_ρ)- метрическое пространство

b. $\forall p \in [1,+\infty]$: сходимость в (K^n, ρ_ρ)- эквивалентна равномерной по координатной сходимости.

c. $p \neq 2$

d. $p = \pi$

10.Какому условию должна удовлетворяться определенная на R непрерывная функция $u = f(u)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства $\rho(x, y) =| f(x) - f(y) |$?

a. f – монотонная и $f(R) = R$

b. $f = const$

c f – непрерывна на R

d. f –разрывна

11.Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : K^n \times K^n \to R,$ где $n \in N,$ $K = R$ или C и

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} [\sum_{k=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \; если \quad p \in [1,+\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какое из следующих приложений верно?

a. $\forall p \in [1,+\infty) : \left(K^n, \rho_p\right)$ метрическое пространство

b. $\forall p \in [1,+\infty)$ метрическое пространство

c. $p \neq 2$

d. $p = \pi$

12. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : K^n \times K^n \to R,$ где $n \in N,$ $K = R$ или C и

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} [\sum_{k=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \; если \quad p \in [1,+\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какое из следующих приложений верно?

a. $\forall p \in [1,+\infty)$ сходимость в $\left(K^n, \rho_p\right)$ эквивалентна равномерной по координатной сходимости

b.Любое ограниченное множество в $\left(K^n, \rho_p\right)$ вполне ограниченно, а любое ограниченное замкнутое множество компактно.

c. $p \neq 2$

d. $p = \pi$

13. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} [\sum_{n=1}^{n} |x_k - y_k|^p]^{\frac{1}{p}} \text{ если } & p \in [1,+\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, \text{если } & p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих предложений справедливы?

a. $\forall p \in [1,+\infty)$: (l_p, ρ_p) метрическое пространство

b. Из сходимости в (l_p, ρ_p) при $p \in [1,+\infty)$ следует покоординатная сходимость

c. (l_3, ρ_3) не метрическое пространство

d. (l_1, ρ_1) не метрическое пространство

14. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} [\sum_{n=1}^{n} |x_k - y_k|^p]^{\frac{1}{p}} \text{ если } & p \in [1,+\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, \text{если } & p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих предложений справедливы?

a. $\forall p \in [1,+\infty)$: (l_p, ρ_p) метрическое пространство

b. Сходимость в (l_∞, ρ_∞) совпадает с равномерной покоординатной сходимостью при $p \in [1,+\infty)$ следует покоординатная сходимостью

c. (l_3, ρ_3) не метрическое пространство

d. (l_1, ρ_1) не метрическое пространство

15. Пусть $p \in [1,+\infty]$ и функция $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} [\sum_{n=1}^{n} |x_k - y_k|^p]^{\frac{1}{p}} \text{ если } & p \in [1,+\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, \text{если } & p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

a. (l_p, ρ_p) полное метрическое пространство при $p \in [1,+\infty)$

b. (l_∞, ρ_∞) не является сепарабельным метрическим пространством

c. (l_∞, ρ_∞) является сепарабельным метрическим пространством

d. (l_p, ρ_p) неполное метрическое пространство

16. Какие из следующих утверждений несправедливы?

a. Любое ограниченное множество в (l_∞, ρ_∞) вполне ограничено

b. Пространства (l_p, ρ_p) при $p \in [1,+\infty)$ некомпактны

c. Пространства (l_p, ρ_p) при $p \in [1,+\infty)$ компактны

d. Любое ограниченное множество в (l_p, ρ_p) при $p \in [1, +\infty)$ вполне ограниченно

17. Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\rho_\rho : l_p \times l_p \to R$, где

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} [\sum_{n=1}^{n} | x_k - y_k |^p]^{\frac{1}{p}} \, если \quad p \in [1, +\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, если \quad p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

a. $l_p \subset l_q$ при $p < q$, $p, q \in [1 + \infty)$

b. $l_\infty \supset l_1$

c. $l_p \supset l_q$ при $p < q$, $p, q \in [1 + \infty)$

d. $l_p \not\subset l_q$ и $l_q \not\subset l_p$ при $p < q$, $p, q \in [1 + \infty)$

18. Пусть $s = \{ f \mid f : N \to R \}$ и фикция $\rho : s \times s \to R$ определена равенством

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{| f(n) - g(n) |}{1 + | f(n) - g(n) |}.$$

Какие из следующих утверждений верны?

a. (s, ρ)-компактное пространство

b. Сходимость в (s, ρ) равномерная покоординатная

c. (s, ρ) - полное пространство

d. (s, ρ)- сепарабельное пространство

19. Пусть $s = \{ f \mid f : N \to R \}$ и фикция $\rho : s \times s \to R$ определена равенством

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{| f(n) - g(n) |}{1 + | f(n) - g(n) |}.$$

Какие из следующих утверждений верны?

a.На (s, ρ) можно задать норму так, что $\rho(x, y) = \| x - y \|$

b.Любое множество в (s, ρ) предкомпактное

c. (s, ρ)- линейное метрическое пространство

d. Сходимость в s по координатная

20. Какие из следующих утверждений справедливы?

a. В любом метрическом пространстве замыкание шара $\overline{B(x, r)}$ лежит в замкнутом шаре $\overline{B}(x, r)$.

b. В любом метрическом пространством E для любого $r > 0$ выполняется неравенство $0 \le diam B(x, r) \le 2r$.

c. $diam B(x, r) \ge 3r$

d. $diam B(x, r) = 0$.

7.1.3. Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов

1. Скалярное произведение в линейном пространстве над полем (действительных или комплексных) скаляров.
2. Принцип равномерной ограниченности (=теорема Банаха-Штейнхауса).

3. Неравенство Коши-Буняковского. Предгильбертово пространство. Непрерывность скалярного произведения и нормы в предгильбертовом пространстве.
4. Критерий поточечной сходимости ограниченных линейных операторов к линейному ограниченному оператору.
5. Определение гильбертова пространства. Понятие ортогонального дополнения множества и его замкнутость.
6. Критерий поточечной сходимости последовательности и линейных ограниченных функционалов к линейному ограниченному функционалу.
7. Лемма Беппо-Леви.
8. Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора, отображающего ЛНП на ЛНП.
9. Задача. Напишите общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $L_p(p \in (1,+\infty))$. Привести конкретный пример функционала и найти норму.
10. Теорема о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве
11. Теорема об ограниченной обратимости оператора $\mathrm{I} + \mathrm{A}$.
12. Ортогональное разложение гильбертово пространства.
13. Теорема об условиях ограниченной обратимости оператора $B = A + \Delta,$ где $A, \Delta A \in L_b(E, F).$
14. Критерий всюду плотности множества в гильбертовом пространстве.
15. Теорема Банаха о гомеоморфизме.
16. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала, определенного в гильбертовом пространстве.
17. Утверждения об открытости множества регулярных значений линейного ограниченного оператора и замкнутости его спектра.
18. Понятие ортогональной системы и ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Понятие ряда Фурье и вопрос о его сходимости.
19. Эквивалентные формулировки понятия замкнутого линейного оператора и замкнутости его спектра.
20. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Свойство частных сумм ряда Фурье.
21. Теорема Банаха – Хана о продолжении линейного ограниченного функционала в ЛНП.

7.1.4. Примерные вопросы к экзамену по дисциплине

1. Кольцо множеств, полукольцо множеств, алгебра и сигма-алгебра множеств. Измеримое пространство.
2. Монотонный класс множеств и теорема о монотонном классе.
3. Конечно-аддитивная и счетно-аддитивная функция множеств, продолжение меры на кольцо.
4. Мера Стилтьеса.
5. Внешняя мера, измеримые множества.
6. Теорема Каратеодори об измеримых множествах.
7. Продолжение меры по Лебегу и Жордану.
8. Измеримые функции и их свойства.
9. Различные типы сходимости функций и связь между ними.

10. Теоремы Лузина и Егорова.
11. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной функции множества.
12. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега и теорема Радона-Никодима (без доказательства).
13. Теорема о монотонной сходимости.
14. Лемма Фату.
15. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
16. Произведение мер и теорема Фубини (без доказательства).
17. Мера Лебега в R^n.
18. Критерий Лебега интегрируемости по Риману.
19. ЛНП и (B)-пространства: определения и примеры.
20. Пространства ограниченных операторов L(E,F) и его полнота.
21. Изоморфизм (B)-пространств.
22. Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по непрерывности в (B)-пространствах.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении.
24. Сопряженные и рефлексивные пространства.
25. Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^*$.
26. Биортогональные системы: определение и примеры.
27. Отображения двойственности и рефлексивные пространства.
28. Неравенства Гельдера и Минковского для рядов и интегралов.
29. Лебеговы пространства $L_p(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$ и их свойства.
30. Сопряженное пространство $L_p^*(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$.
31. Сопряженные линейные операторы.
32. Строго ЛНП и наилучшие приближения в ЛНП.
33. Наилучшие приближения в $L_p(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$.
34. Всюду плотные множества в $L_p(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$, аппроксимация гладкими функциями.
35. Предгильбертовы (=евклидовы) и гильбертовы пространства: определения и примеры.
36. Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.
37. Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
38. Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте.
39. Изоморфизм гильбертовых пространств.
40. Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$, формулы преобразования Фурье.
41. Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$, теорема Планшереля об операторе Фурье
42. Аксиомы сходимости по Френе, линейные пространства сходимости, полнота сопряженных пространств.
43. Принцип равномерной сходимости функционалов в сопряженном пространстве для пространства сходимости.
44. Локально выпуклые пространства.
45. Пространства основных функций D(Rn) и обобщенный функций D´(Rn), Действия с обобщенными функциями.
46. Структура обобщенных функций.
47. Сопряженное пространство E´(Rn).
48. Свойства пространства E´(Rn), регулярные обобщенные функции.

49. Пространства Соболева.
50. Пространства Шварца J´(Rn) и преобразование Фурье в J´(Rn).
51. Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве.
52. Принцип равномерной ограниченности для ЛНП.
53. Сильная и слабая сходимость операторов.
54. Слабая* сходимость функционалов.
55. Теорема о замкнутом графике.
56. Теорема об обратном операторе.
57. Спектр ограниченного оператора, граница спектра и спектральный радиус.
58. Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве.
59. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствие.
60. Критерий компактности множества в C(X).
61. Критерий компактности множества в пространствах lp и Lp(X) ($1\leq p \leq \infty$).
62. Слабо* компактные множества и их свойства.
63. Критерий слабой* компактности множества
64. Компактные операторы и их основные свойства.
65. Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в (B)-пространстве.
66. Четыре теоремы Фредгольма.
67. Свойства эрмитовых операторов.
68. Теорема Гильберта-Шмидта.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 30баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

Основная

1) Колмогоров,А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.
2) Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие / Люстерник Л.А., В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань : Изд.

высшая школа, 1982. - 270,[1] с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0976-1: 288-75.
3) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
4) Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN 5-9221-0271-0 : 151-01.
5) Асташова И.В. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Асташова И.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2011.— 112 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11120.html.— ЭБС «IPRbooks» (25.01.2018)

Дополнительная

6) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.
7) Рудин У. Функциональный анализ / Рудин, Уолтер ; пер. с англ. В.Я.Лина; под ред. Е.А.Горина. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 443 с. ; 23 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 430-431. - Указ. имен. и терминов: с. 435-440 . - ISBN 5-8114-0611-8 : 312-18.
8) Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович, Леонид Витальевич. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1977. - 741 с. : ил. ; 22 см. - Список лит.: с.719-730. - Указ. предм.: и обозначений: с. 731-741. - 3-20.
9) Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 216 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/66213.html.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	**Студентам:** - запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.

			Всем заинтересованным пользователям: **1.** – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. **2.** – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.**Ru**)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по функциональному анализу распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

Дисциплин «Функциональный анализ» являются основной базой всех специальных дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплинs состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных
в теоретическом курсе;

2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;

3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.
Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а
именно:
а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного
отношения к работе;
в) воспитание критического отношения к своей деятельности,
умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения,
находить свои ошибки и устранять их.

Методические рекомендации

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981.
2 Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* М.: Высшая школа, 1982.
3 Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN

Решить задач и упражнений из учебного пособия Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.
Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросами для самопроверки

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по функциональному анализу рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.
При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные

проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.
В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.