

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Многомерный комплексный анализ

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета
математики и компьютерных наук

Образовательная программа

01.03.01–Математика

Профиль подготовки

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Форма обучения: **очная**

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП формируемую участниками
образовательных отношений

Махачкала, 2021г

Рабочая программа дисциплины «*Многомерный комплексный анализ*» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки) *01.03.01 - Математика* от 10.01.2018 г. № 8

Разработчик(и): *кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Сиражудинов М.М., д.ф.-м.н., профессор*

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 23.06.2021г., протокол № 6

Председатель  Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением 9.07.2021г.

Начальник УМУ



Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Многомерный комплексный анализ» входит в часть ОПОП формируемую участниками образовательных отношений по направлению 01.03.01– Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа. Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с основными понятиями и методами многомерного комплексного анализа и их некоторыми приложениями.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных – ОПК-1, профессиональных – ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *2-х коллоквиумов (модулей)*, промежуточный контроль в форме *зачета.*

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семес тр	Учебные занятия						СРС	Форма промежуто чной аттестации (зачет, дифференц ированный зачет, экзамен)
	Все го	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лек ции	Лаборат орные занятия	Практич еские занятия	КСР	консуль тации				
8	72	16		16			40	Зачет

1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является изучение основных понятий и методов многомерного комплексного анализа, приобретение навыков решения задач в данной области.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Многомерный комплексный анализ» входит в вариативную часть образовательной программы *бакалавриата* по направлению *01.03.01–Математика* и является *дисциплиной по выбору*.

Курс «Многомерный комплексный анализ» преподается на 4 курсе факультета математики и компьютерных наук. Для его успешного изучения необходимы знания и умения, приобретённые в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, комплексный анализ, дифференциальная геометрия, алгебра.

Освоение дисциплины «Многомерный комплексный анализ» необходимо при написании выпускной квалификационной работы, а также последующем изучении дисциплин магистратуры, связанных с системами уравнений в частных производных. Этот раздел науки является необходимым для обучения в аспирантуре по специальностям «Дифференциальные уравнения», «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
-------------	-------------------------------------	---

ОПК-1	<p>Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики,</p>	<p>Знает: основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p>Умеет: решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p>Владеет: методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>
-------	---	---

	<p>теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности</p>	
ПК-3	<p>Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</p>	<p>Знает: основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p>Умеет: решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p>Владеет: методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости и (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных									
1	Голоморфные функции	8	1	4	4			10	Устный опрос
2	Голоморфные отображения	8	2-3	4	4			10	Тестирование
	<i>Итого по модулю 1</i>			8	8			20	<i>Коллоквиум</i>
Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного									

<i>анализа</i>									
1	Многообразия и формула Стокса	8	6-8	4	2			10	Устный опрос
2	Области голоморфности	8	8	4	4			10	Устный опрос
	<i>Итого по модулю 2</i>			8	8			20	<i>Контрольная работа</i>
	ИТОГО			16	16			40	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных

Тема 1. Голоморфные функции

Пространство \mathbb{C}^n , простейшие области в нем. Голоморфные функции и их простейшие свойства. Многомерные условия Коши-Римана. Теорема Хартогса. Разложение голоморфных функций в степенные ряды, ряды Лорана и Хартогса.

Тема 2. Голоморфные отображения

Голоморфные отображения и их свойства. Группы автоморфизмов простейших областей. Инвариантные метрики.

Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного анализа

Тема 3. Многообразия и формула Стокса

Многообразия и формы. Цепи и их границы. Дифференцирование форм. Формула Стокса.

Тема 4. Области голоморфности.

Определение области голоморфности в \mathbb{C}^n . Продолжение с помощью формулы Коши. Принцип максимума для аналитических дисков, продолжение с помощью дисков. Голоморфная выпуклость и область голоморфности (эквивалентность). Форма Леви вещественной гиперповерхности. Субгармонические и плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклость.

4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине

Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных

Тема 1. Голоморфные функции

Пространство \mathbb{C}^n , простейшие области в нем. Голоморфные функции и их простейшие свойства. Многомерные условия Коши -Римана. Теорема Хартогса. Разложение голоморфных функций в степенные ряды, ряды Лорана и Хартогса.

Тема 2. Голоморфные отображения

Голоморфные отображения и их свойства. Группы автоморфизмов простейших областей. Инвариантные метрики.

Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного анализа

Тема 3. Многообразия и формула Стокса

Многообразия и формы. Цепи и их границы. Дифференцирование форм. Формула Стокса.

Тема 4. Области голоморфности.

Определение области голоморфности в \mathbb{C}^n . Продолжение с помощью формулы Коши. Принцип максимума для аналитических дисков, продолжение с помощью дисков. Голоморфная выпуклость и область голоморфности (эквивалентность). Форма Леви вещественной гиперповерхности. Субгармонические и плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклость.

5. Образовательные технологии

В соответствии с требованиями ФГОС при реализации различных видов учебной работы в процессе изучения дисциплины «Многомерный комплексный анализ» предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

- практические занятия в диалоговом режиме;
- компьютерное моделирование и практический анализ результатов;
- научные дискуссии;
- работа в малых группах по темам, изучаемым на практических занятиях.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Виды самостоятельной работы студентов, распределенные по темам:

<i>Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения</i>	<i>Виды и содержание самостоятельной работы</i>	
	<i>Обязательные</i>	<i>дополнительные</i>
Модуль 1. Голоморфные функции нескольких переменных		
1. Голоморфные функции.	Работа с литературой, решение домашнего задания	[1], глава VIII, §1, [4], глава 1, §1–3
2. Голоморфные отображения	Работа с литературой, решение	[4], глава 1, §2, [6], § 7

	домашнего задания	
Модуль 2. Геометрические понятия многомерного комплексного анализа		

1. Многообразия и формула Стокса	Работа с литературой, решение домашнего задания	подготовка к коллоквиуму, [4], § 5
2. Области голоморфности	Работа с литературой, решение домашнего задания	[4], глава 3, §12, [1], § 2.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-1	<p>Знает: основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p>Умеет: решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p>Владеет: методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>	<p>Повторение постановок задач и их решения в классическом анализе, сравнение с аналогичными задачами в одномерном случае.</p> <p>Проверка освоения в виде устного опроса и тестирования.</p>

ПК-3	<p>Знает: основные понятия многомерного комплексного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.</p> <p>Умеет: решать задачи практического и теоретического характера.</p> <p>Владет: методами анализа и решения задач теории функций многих комплексных переменных.</p>	<p>Изучение тем дисциплины по лекциям, основной литературе [1] – [4], на практических занятиях решать задачи из книг [1], [2], [6]; выступления с докладами</p>
------	---	---

7.2. Типовые контрольные задания

7.2.1. Примерные задания для контрольных работ

1. Построить границы Шилова для следующих областей: 1) шар, 2) поликруг, 3) трубчатая область.
2. Найти области сходимости рядов:
 - а) $\sum z_1^{m_1} z_2^{m_2}$; б) $\sum z_1^{m_1} z_2$; в) $\sum (z_1 z_2)^m$.
3. Показать, что степенной ряд

$$\sum_{m,n \geq 0} \frac{(m+n)!}{m!n!} z_1^m z_2^n$$

- абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $|z_1| + |z_2| < 1$.
4. Доказать, что если голоморфная функция $f(z_1, z_2)$ равна нулю на множестве $\{z_1 = \bar{z}_2\}$, то $f \equiv 0$.
 5. Докажите, что унитарное преобразование в \mathbb{C}^2 можно записать в виде

$$(z_1, z_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} \left(e^{i\theta_1}(z_1 + \lambda z_2), e^{i\theta_2}(\bar{\lambda}z_1 - z_2) \right),$$
 где λ – комплексное, а θ_1, θ_2 – вещественные числа.
 6. Докажите, что две различные комплексные прямые в \mathbb{C}^2 могут иметь не более одной общей точки.
 7. Докажите, что в проективном пространстве \mathbb{P}^n две любые комплексные гиперплоскости пересекаются.
 8. Докажите, что преобразование Рейнхарта $\alpha(z) = (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$ переводит любую область $D \subset \mathbb{C}^n$, не пересекающуюся с множеством $\{z_1 \cdots z_n = 0\}$, в область пространства \mathbb{R}^n .
 9. Постройте степенные ряды, для которых областью сходимости являются:
 - а) шар $\{z \in \mathbb{C}^2: |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$; б) область $\{z \in \mathbb{C}^2: |z_1| + |z_2| < 1\}$.
 10. Для сферы $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1\}$ постройте гладкий атлас, состоящий из двух карт.
 11. Даны дифференциальные формы $\omega' = \sum_{k=1}^n a_k dz_k$ и $\omega'' = \sum_{k=1}^n b_k dz_k$ бистепени $(1,0)$ такие, что соответствующие им векторы $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ортогональны в смысле евклидова скалярного произведения. Докажите, что $\omega' \wedge \omega'' = 0$ лишь в случае, когда $\omega' = 0$ или $\omega'' = 0$.
 12. Пусть f голоморфна в поликруге $U \subset \mathbb{C}^n$ и непрерывна на множестве $U \cup \Gamma$, где Γ – остов U . Докажите, что f продолжается до функции из $C(\bar{U})$.
 13. Докажите, что область сходимости ряда из полиномов является полиномиально выпуклой.
 14. Докажите, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{C}^n$ класса C^1 голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^m$ в том и только том случае, когда его график $\{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{m+n}: z \in D\}$ – комплексное многообразие.

7.2.1. Примерные контрольные вопросы для подготовки к зачету

1. Пространство \mathbb{C}^n , простейшие области в нем.
2. Голоморфные функции и их простейшие свойства.
3. Многомерные условия Коши -Римана.
4. Теорема Хартогса.
5. Разложение голоморфных функций в степенные ряды, ряды Лорана и Хартогса.

6. Голоморфные отображения и их свойства. Группы автоморфизмов простейших областей. Инвариантные метрики.
7. Многообразия и формы. Цепи и их границы.
8. Дифференцирование форм.
9. Формула Стокса.
10. Определение области голоморфности в \mathbb{C}^n .
11. Продолжение с помощью формулы Коши.
12. Принцип максимума для аналитических дисков, продолжение с помощью дисков.
13. Голоморфная выпуклость и область голоморфности (эквивалентность). Форма Леви вещественной гиперповерхности.
14. Субгармонические и плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклость.

7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%. Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов. Промежуточный контроль по дисциплине включает:
 - устный опрос – 50 баллов,
 - письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Ганнинг Р.

Аналитические функции многих комплексных переменных. / Пер. с англ. И.Я. Вахутинского и В.Я. Яна. Под ред. Е.А. Горина. - М. : Мир, 1969. - 395с. ; 22см. - Библиогр.: с. 377-389.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

2. Бицадзе Андрей Васильевич.

Основы теории аналитических функций комплексного переменного : Для мех.-мат.и физ. специальностей вузов / Бицадзе Андрей Васильевич. - 2-е изд. - М. : Наука, 1972. - 263с. ; 20см. - 0-57.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

3. Шабат, Б.В.

Введение в комплексный анализ. Ч.2 : Функции нескольких переменных / Б. В. Шабат. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. - 336 с. - 00-95.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

4. Владимиров, Василий Сергеевич.

Методы теории функций многих комплексных переменных. / Владимиров, Василий Сергеевич; Предисловие академика Н.Н. Боголюбова. - М : Наука, 1964. - 411 с. : с черт. ; 21 см. - с.400-407. Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

б) дополнительная литература:

5. Лаврентьев, М.А.

Методы теории функций комплексного переменного : учебное пособие для вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - 4-е изд., испр. - М.: Наука, 1973. - 736 с. - 1-77.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

6. Привалов, Иван Иванович.

Введение в теорию функций комплексного переменного : учеб. для вузов / Привалов, Иван Иванович. - Изд. 14-е, стер. - М. : Высш. шк., 1999. - 432 с. - 35-70.

Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

7. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Часть 2. Интегральное исчисление функций скалярного аргумента. Часть 3. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Зверович Э.И. – Электрон.

текстовые данные. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.– 306 с.– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20064.html>. – ЭБС «IPRbooks»

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт – для школьников, студентов, учителей и для всех, кто
			интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	<p>Студентам:</p> <ul style="list-style-type: none"> - запустить установленный у Вас математический пакет выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии <p>Преподавателям:</p> <ul style="list-style-type: none"> - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. <p>Всем заинтересованным пользователям:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. 2. найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru , http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Специфика изучаемой дисциплины «Многомерный комплексный анализ» состоит в том, что для ее освоения необходимо творчески владеть методами современной геометрии и топологии, алгебры и одномерного комплексного анализа, знать фундаментальные утверждения, отличающие многомерный комплексный анализ от одномерного и отражающие специфику многомерного случая. Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях. Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен. Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Многомерный комплексный анализ» необходимы:

Системное программное обеспечение: ОС Windows 7/8/10;

Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/2010/2013;

Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных и практических занятий по дисциплине необходима аудитория на 20-25 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины «Многомерный комплексный анализ». Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с

соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами. В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.