

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

Рабочая программа по дисциплине:

## «Дифференциальные уравнения»

Образовательная программа:

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки:

«Математический анализ и приложения»

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Форма обучения:

Очная

Статус дисциплины:

входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала 2021

Рабочая программа дисциплины «**Дифференциальные уравнения**» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриат) от 23.08.2017 г. №807.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Сиражудинов М.М., д. ф.-м.н., профессор, Джабраилова Л.М., к.ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 23.06.2021г., протокол № 6

Председатель  Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением 9.07.2021г.

Начальник УМУ  Гасангаджиєва А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина "Дифференциальные уравнения" входит в обязательную часть ОПОП образовательной программы **бакалавриата** по направлению **02.03.01 Математика**.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с формированием и развитием у студентов профессиональных и специальных компетенций, позволяющих им на базе освоенных теоретических и практических основ математического аппарата осуществлять профессиональную деятельность. Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: профессиональных – **УК -1, ОПК-1, ПК-1**.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: **лекции, практические занятия, самостоятельная работа**.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме **контрольная работа, коллоквиум и тестирование** и промежуточный контроль в форме **зачета и экзамена**.

Объем дисциплины 8 зачетных единиц, в том числе в 288 академических часах по видам учебных

### Очная форма обучения

Семестр	Учебные занятия							СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференциро- ванный зачет, экзамен)	
	в том числе:									
	всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем					КСР			консультации
		всего	из них							
	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации					
3		28		28			52	зачет		
4		28		28			88	экзамен		
	288	56		56			140+	36		

### 1. Цели освоения дисциплины.

Целью дисциплины "Дифференциальные уравнения" является обучение студентов основным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений и использованию при

математическом моделировании физических, биологических и других процессов .Обучение фундаментальным методам современной количественной и качественной теории дифференциальных уравнений как средства математического моделирования детерминированных явлений, ознакомить студентов с методами решения интегрируемых типов дифференциальных уравнений, методами качественного исследования и применения дифференциальных уравнений в математическом моделировании динамических процессов. Научить студентов самостоятельно расширять теоретические знания

## 2.Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата. :

Дисциплина " Дифференциальные уравнения " входит в обязательную часть ОПОП бакалавриата по направлению **02.03.01 Математика**

Является одним из начальных разделов современной математики и играет важную роль в осознанном освоении других математических и прикладных дисциплин, т.к. методы дифференциальных уравнений находят самое широкое применение во многих науках. Эта дисциплины вместе с математическим анализом, теорией функции комплексного и действительного переменного являются фундаментом, на котором строится вся математическая наука. В дисциплине используется материал следующих дисциплин «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Теория функции комплексной переменной». Материал дисциплины является опорным для изучения таких дисциплин, как «Вычислительные методы», «Методы оптимизации и исследование операций», «Теория устойчивости дифференциальных уравнений»

### Задачи изучения дисциплины

Основными задачами дисциплины являются :

- изучение вопросов существования и единственности решений различных типов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, нахождения точных решений уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах, уравнений n-го порядка, допускающих понижения порядка, линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами;
- изучение основных методов доказательства существования и единственности решений начально-краевых задач для указанных уравнений, вопросов устойчивости решений по Ляпунову, ознакомление с приближенными методами решения указанных уравнений и обучение студентов применению теории дифференциальных уравнений в прикладных задачах.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения и процедура освоения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения

<p>УК-1. Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	<p>УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.</p>	<p><b>Знает:</b> структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач.</p> <p><b>Умеет:</b> анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум</p>
--	---	--	---

	<p>УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.</p>	<p><b>Знает:</b> принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. <b>Умеет:</b> системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок</p>	
--	--	---	--

	<p>УК-1.3.Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных</p>	<p><b>Знает:</b> современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет.</p> <p><b>Умеет:</b> применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно-образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в деятельности педагога.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторов.</p>	
			...
<p>ОПК-1</p> <p>Способность консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального</p>	<p>ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук.</p>	<p><b>Знает:</b> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос; контрольная работа, коллоквиум</p>

<p>анализа алгебры аналитической геометрии, дифференциальной геометрии топологии, и дифференциальных уравнений, дискретно- математики математической логики, теории вероятностей, математической статистики случайных процессов, численных методов, теоретической механики профессиональной деятельности</p>		<p>математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики.</p> <p><b>Умеет:</b> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами.</p> <p><b>Владеет:</b> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач</p>	
	<p>ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности</p> <p>...</p>	<p><b>Знает:</b> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p> <p><b>Умеет:</b> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.</p>	
	<p>ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p>	<p><b>Знает:</b> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><b>Умеет:</b> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук.</p> <p><b>Владеет:</b> навыками выбора методов решения задач современного математического</p>	

		анализа	
			...
ПК-1. Способность демонстрировать базовые знания	ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями,	<b>Знает:</b> основы математического анализа и различные приложения дифференциального и	Круглый стол Устный опрос, письменный

математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	интегрального исчисления в математических и естественных науках; современные языки программирования и современные информационные технологии. <b>Умеет:</b> применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения различных задач математических и естественных наук; составлять программы на современных языках программирования. <b>Владеет:</b> базовыми методами дифференциального и интегрального исчислений; навыками программирования на современных языках	опрос; контрольная работа, коллоквиум
--	---	--	---



	<p>ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике</p>	<p><b>Знает:</b> области применения дифференциального и интегрального исчисления; различные языки программирования.</p> <p><b>Умеет:</b> решать задачи, связанные: с исследованием свойств функций и их производных, с изучением функциональных рядов, с оценкой погрешности аппроксимации функций; применять различные языки программирования в численном анализе. <b>Владеет:</b> методами дифференциального исчисления для исследования функций и навыками приложения интегрального исчисления к геометрии и физике</p>	
	<p>ПК-1.3. Имеет практический опыт научноисследовательской деятельности в математике и информатике</p>	<p><b>Знает:</b> методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов; методы исследования сходимости рядов; численные методы анализа; современные информационные технологии.</p> <p><b>Умеет:</b> применять методы исследования функций с помощью производных, вычисления интегралов и методы исследования сходимости рядов в численном анализе с использованием современных информационных технологий. <b>Владеет:</b> навыками решения задач численного анализа с</p>	
		<p>использованием методов дифференциального и интегрального исчисления</p>	

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

**4.1. Объем дисциплины составляет 8 зачетных единиц, 288 академических часов.**

**4.2. Структура и содержание дисциплины**

№	Раздел дисциплины	Все го	Виды учебной работы, включая сам.раб. студ-в и трудоемк. (в час.)			Экзамен	Формы текущ.контр. успеv-ти. Форма промежут. аттестации
			лек.	пр. зан.	сам. раб.		
<b>Модуль 1. Дифференциальные уравнения первого порядка</b>							
	Раздел1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Существование и единственность решения задачи Коши.	12	2	2	6	2	Контрольная работа
	Раздел 2. Уравнение в полных дифференциалах. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли, Риккати	12	4	4	6	2	Контрольная работа
	Раздел3.Уравнения,неразрешенные относительно производной Уравнение Клеро и Лагранжа.	12	2	2	6	2	Коллоквиум
	<b>Итого за модуль</b>	<b>36</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>18</b>	<b>6</b>	
<b>Модуль 2.Дифференциальные уравнения высших порядков</b>							
4	Раздел 4. Дифференциальные уравнения высших порядков..	8	2	2	2	2	Контрольная работа
6	Раздел5.Линейные однородные дифференциальные уравнения с пост. коэффициентами	12	4	4	2	2	Контрольная работа
	Раздел 6.Линейные неоднородные уравнения .	16	4	4	6	2	Контрольная работа
	<b>Итого за модуль</b>	<b>36</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>6</b>	Коллоквиум
<b>Модуль 3. Краевые задачи</b>							
	Раздел 6. Краевые задачи для дифуравнения второго порядка. Функция Грина. Задача Штурма – Лиувилля	16	4	4	4	2	Коллоквиум Контрольная работа

Линейный дифференциальный оператор .Свойства. Самосопряженные операторы.	20	6	6	4	2	Контрольная работа
<b>Итого за модуль</b>	36	10	10	8	8	зачет
<b>Итого за семестр</b>	108	28	28	36	16	
<b>Модуль 4 : Системы дифференциальных уравнений</b>						
<b>Раздел 7.</b> Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	20	4	4	6	6	Контрольная работа
<b>Раздел 8.</b> Неоднородные системы дифуравнений. Нелинейные системы.	16	2	2	6	6	Контрольная работа
<b>Итого за модуль</b>	36	6	6	12	12	
<b>Модуль 5.</b> Линейные системы с периодическими коэффициентами						
<b>Раздел 9.</b> Линейные системы с периодическими коэффициентами. Мультипликаторы. Теорема о приводимости линейной системы. Краевая задача для линейной системы. Функция Грина	16	2	2	6	6	Контрольная работа
<b>Раздел 10.</b> Общее решение, общий интеграл, независимые интегралы системы дифференциальных уравнений. Методы интегрирования нелинейных систем	20	4	4	6	6	Контрольная работа
<b>Итого за модуль</b>	36	6	6	12	12	
<b>Модуль 6</b> Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений						Контрольная работа
<b>Раздел 11.</b> Устойчивость линейных систем. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому линейному приближению	16	4	4	4	4	Контрольная работа
<b>Раздел 12.</b> Качественное исследование плоских систем, точки покоя. Предельные циклы автономных систем	20	4	4	6	6	Контрольная работа
<b>Итого за модуль</b>	36	8	8	10	10	

<b>Модуль7</b> Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.						Контрольная работа
Раздел 14. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.	<b>16</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	Контрольная работа
Задача Коши. Однородные уравнения с частными производными первого порядка.						
Раздел 15. Неоднородные уравнения с частными производными. Нелинейные системы уравнений с частными производными первого порядка	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	Контрольная работа
<b>Итого за модуль</b>	<b>36</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	
<b>Итого за семестр</b>	<b>108</b>	<b>28</b>	<b>28</b>	<b>44</b>	<b>44</b>	
<b>Модуль 8 : подготовка к экзамену</b>					<b>36</b>	<b>экзамен</b>
<b>Итого</b>	<b>288</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>140</b>	<b>36</b>	

### 4.3. Содержание разделов учебной дисциплины

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий

##### **Модуль 1. Дифференциальные уравнения первого порядка**

**Тема 1.** Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Существование и единственность решения задачи Коши. уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения.

**Тема 2.** Уравнение Бернулли, Риккати. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно

производной. Особые решения. Неполные уравнения. Уравнения Лагранжа и Клеро. Метод введения параметра.

## **Модуль2. Дифференциальные уравнения высших порядков**

**Тема 1.** Дифференциальные уравнения высших порядков. Случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.

### **Тема 2.**

Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Построение однородного линейного уравнения по фундаментальной системе решений. Понижение порядка однородного линейного уравнения при помощи линейно независимых частных решений. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления

## **Модуль3.Краевые задачи**

**Тема 1.** Линейный дифференциальный оператор. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Функция Грина. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Представление решений в окрестности особой точки в виде обобщенных степенных рядов.

**Тема 2.** Уравнение Бесселя. Задача.Штурма Лиувилля .Свойства. Самосопряженные операторы.

## **Модуль 4.Системы дифференциальных уравнений**

**Тема 1.**Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений.

**Тема 2.** Линейные системы дифференциальных уравнений. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского. Метод Эйлера решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами. Матричный метод решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами

**Тема 3.** Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной. Метод Эйлера решения неоднородных систем. Нули решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Теорема Штурма. Теорема сравнения.

**Модуль 5. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами**

**Тема 1.** Линейные системы с периодическими коэффициентами. Мультипликаторы. Теорема о приводимости линейной системы. Краевая задача для линейной системы. Функция Грина

**Тема 2.** Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметров.

Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. Общее решение, общий интеграл, независимые интегралы системы дифференциальных уравнений. Методы интегрирования нелинейных систем

**Модуль 6. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений.**

**Тема 1.** Устойчивость линейных систем. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому линейному приближению. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Общее решение, общий интеграл, независимые интегралы системы дифференциальных уравнений.

**Тема 2.** Качественное исследование плоских систем, точки покоя. Предельные циклы автономных систем. Прикладные задачи естествознания.

**Модуль 7. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.**

**Тема 1.** Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши. Однородные уравнения с частными производными первого порядка. Теорема существования и единственности для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

**Тема 2.** Неоднородные уравнения с частными производными. Нелинейные системы уравнений с частными производными первого порядка. Уравнение Пфаффа

**Модуль 8. Подготовка к экзамену.**

### 4.3.2. Содержание практических занятий

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
	Модуль 1.	Дифуравнения первого порядка	
1.		Дифференциальные уравнения первого порядка.. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводимые к однородным. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Интегрируемые в квадратурах дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.	8
	Модуль 2	Дифуравнения высших порядков	
2.		Дифференциальные уравнения n-го порядка. Случаи понижения порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами. Линейные неоднородные уравнения. Методом вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные уравнения с постоянными	10
		коэффициентами и специальной правой частью. Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами.	
	Модуль 3.	Краевые задачи	
		Линейный дифференциальный оператор. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Функция Грина. Задача Штурма – Лиувилля	10
	Модуль 4	Системы дифференциальных уравнений	
3.		Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Матричный метод. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной. Линейные неоднородные системы со специальной правой частью.	6
	Модуль 5.	Линейные системы с периодическими коэффициентами	
4.		Линейные системы с периодическими коэффициентами. Мультипликаторы. Теорема о приводимости линейной системы. Краевая задача для линейной системы. Функция Грина.	6

	Модуль 6.	Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений	
5.		Исследование на устойчивость систем дифференциальных уравнений по линейному приближению, с помощью функций Ляпунова. Общее решение, общий интеграл, независимые интегралы системы дифференциальных уравнений. Качественное исследование плоских систем, точки покоя. Предельные циклы автономных систем.	8
	Модуль 7.	Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.	
6.		Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши.	8
	Итого		56

## 5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов. По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы экспертов и специалистов. В ходе освоения дисциплины предусматривается применение следующих активных методов обучения

1. Выполнение практических заданий с элементами исследования.
2. Отчетные занятия по разделам.
3. Выполнение студентами индивидуальной исследовательской работы по анализу заданий с поиском и выбором метода их решения.
4. Лабораторные занятия.

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов. По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в



интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы экспертов и специалистов. Вузовская лекция должна выполнять не только информационную функцию, но также и мотивационную, воспитательную и обучающую.

**Информационная функция** лекции предполагает передачу необходимой информации по теме, которая должна стать основой для дальнейшей самостоятельной работы студента.

**Мотивационная функция** должна заключаться в стимулировании интереса студентов к науке. На лекции необходимо заинтересовывать, озадачить студентов с целью выработки у них желания дальнейшего изучения той или иной экономической проблемы.

**Воспитательная функция** ориентирована на формирование у молодого поколения чувства ответственности, закладку нравственных, этических норм поведения в обществе и коллективе, формирование патриотических взглядов, мотивов социального поведения и действий, финансово-экономического мировоззрения.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Самостоятельная работа студентов организована в различных видах и формах, включая подготовку к учебным занятиям и научно-исследовательскую деятельность студентов, обеспечена учебно-методическими материалами. Контроль выполнения самостоятельной работы проводится средствами, соответствующими данному виду работы.

*Коллоквиум* - средство контроля освоения учебного материала темы или раздела, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися. Перед коллоквиумом по каждому модулю студент должен *самостоятельно* повторить и освоить соответствующий теоретический материал по данному модулю:

- *знать* основные понятия и определения, формулировки основных математических утверждений;
- *уметь* давать: общий анализ основных понятий; геометрические и/или естественнонаучные интерпретации базовых теорем по тематике модуля;
- *владеть* навыками доказательства теорем по тематике модуля.

*Критерии оценки по коллоквиуму*

По данному модулю студенту выставляются:

- 1) 10 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* их иллюстрировать на различных примерах; 2) 20 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать различные из них;

3) 30 баллов, если он *знает* основные понятия, определения, формулировки основных утверждений из данного раздела и *умеет* доказывать их.

Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

*Контрольная работа* - средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Перед контрольной работой по каждому модулю студент должен *самостоятельно* повторить и освоить соответствующий теоретический материал по данному модулю, систематизировать необходимые формулы, детально анализировать ранее решенные на практических занятиях задачи и упражнения. Задания по контрольной работе составлены для проверки освоения необходимых умений и навыков решения задач по тематике данного модуля. *Критерии оценки по контрольной работе*

Если студент *владеет по данному модулю навыками* решения типичных задач, то *по этому модулю* ему выставляются: 1) 30 баллов;

2) 20 баллов в случае наличия неточностей;

3) 10 баллов в случае наличия некоторых допустимых ошибок.

Эти баллы учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

*Тест с анализом* - средство контроля освоения учебного материала в виде письменной работы или собеседования преподавателя с обучающимся для более глубокого анализа условий истинности данного математического утверждения при помощи контрпримеров.

*Критерии оценки по тестам с анализом*

Если студент *умеет* давать *анализ теста* по данному модулю, то *по этому модулю* ему выставляются: 10 баллов за *удовлетворительный анализ*, 20 баллов за *достаточно полный анализ*, 30 баллов за *глубокий анализ*, которые учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

*Доклад* - продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебнопрактической, учебно-исследовательской или научной темы.

*Реферат* - продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой краткое изложение в письменном виде полученных результатов теоретического анализа определенной научной (учебно-исследовательской) темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее. *Критерии оценки по докладу, реферату*

Если студент по теме данного модуля самостоятельно подготовил доклад и выступил с этим докладом публично или написал реферат и раскрыл тему реферата, то ему выставляются 30 баллов, которые учитываются при выводе общего результата как интегральной оценки, складывающейся из текущего контроля и промежуточного контроля.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

1. А.Р. Эфендиев, Дифференциальные уравнения (пособие), ДГУ, 2012 г.
2. А.Р. Эфендиев, Практикум по дифференциальным уравнениям (пособие), ДГУ, 2012 г.
3. Киясов, С.Н.Шурыгин В.В.Дифференциальные уравнения. Основы теории. Учебное пособие./-Казань,КФУ,2011г.
- 4.Мухарлямов Р.К.Панкратьева Т.Н.Системы обыкновенных дифференциальных уравнений./Метод пособие.Казань,КФУ.-2013г

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Раздел 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	
Тема 1. Введение: решение обыкновенного дифференциального уравнения. Геометрическая интерпретация. Задача Коши. Экономические задачи и математические модели приводящие к дифуравнениям.	Доклады на тему: 1. Математическая модель естественного роста.2.Рост производства с учетом инвестиций.
Тема 2.Дифференциальные уравнения высших порядков.	Доклады на тему: 1.Модель колебания рыночных цен. 2.Динамическая модель Леонтьева.
Раздел 2.Прикладные задачи решаемые с применением аппарата дифференциальных уравнений	Доклады на тему: Модель Солоу.
Тема 1.Системы дифференциальных уравнений	Доклад: Устойчивость решений систем дифуравнений
Тема 2. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами .	Доклады на тему: 1Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.
Раздел 3.Дифуравнения высших порядков .	Доклады на тему:1. Задачи по теоретической механике решаемые с помощью ДУ.
Тема 1.Дифуравнения в частных производных первого порядка	Доклады на тему:1.Физические задачи решаемые с применением уравнений в частных производных первого

### Примеры для самостоятельной работы

1. Решить уравнение  $y = xy' - \frac{1}{2}y'^2$ .
2. Решить систему  $x' = 2x - y + z, y' = x + 2y - z, z' = x - y + 2z, (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$
3. Решите уравнение  $(x - y + 1)dx + (-x + 2y)dy = 0$ .
4. Решите систему  $x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, y' = x + 2y$ .
5. Решить уравнение  $xy' + y = y'^2$ .
6. Решить систему  $x' = x + 2y, y' = x + 5\cos t$ .
7. Решить уравнение  $xy' - y = x^3$ .
8. При каких значениях  $a$  асимптотически устойчиво нулевое решение системы  $x' = ax - 2y + x^2, y' = x + y + xy$ .
9. Решить уравнение  $xy' - y = x^3y^2$ .
10. Исследовать систему  $x' = -x + y + xy, y' = x - 7y + x^2$  на устойчивость.
11. Решить уравнение  $(2x + y + 5)dx + (x - 2y)dy = 0$ .
12. Исследовать на устойчивость  $x' = x - y + xy, y' = x + 2y + y^2$ .
13. Найти особые решения уравнения  $8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x)$ .
14. Решить задачу Коши для системы  $\frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \frac{dy}{dt} = x, x(0) = 0, y(0) = 1$ .
15. Каждая из функций семейства  $y = Ce^x + 4$  является решением уравнения  $(y')^2 - yy' + 4e^x = 0$ . Найти особые решения этого уравнения.
16. Решить задачу Коши  $x' = x + y, y' = 4y - 2x, x(0) = 0, y(0) = 1$ .
17. Решить уравнение  $(x - y)dx + (-x + 5y + 4)dy = 0$ .
18. С помощью  $V = x^2 + y^2$  исследовать систему  $x' = y - x^3, y' = -x - 3y^3$  на устойчивость.

19. Решить уравнение  $y''' + y' = x$ .
20. С помощью функции  $V = x^2 + 2y^2$  исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы  $x' = -2y + x^2y^2, y' = x - 0,5y - 0,5x^3y$ .
21. Определить тип особой точки уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{2x + y}$ .
22. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы  $x' = -2x + x^2 + y^2, y' = -x + 3y + 5x^2$ .
23. Найти особые решения уравнения  $(y')^2 - 2xy^2 + y = 0$ .
24. Найти область асимптотической устойчивости системы  $x' = \ln(e + ax) - e^y, y' = bx + \operatorname{tg}y$ .
25. Решить уравнение  $y = 2xy' - y'^2$ .
26. Найти область асимптотической устойчивости системы  $x' = ax - y, y' = -x + by + x^2$ .
27. Являются ли функции  $x, \frac{1}{x}, 2x + \sqrt{4x^2}$  линейно зависимыми.
28. Решить систему  $x' = y + z, y' = x + z, z' = x + y$ .
29. Найти общее решение уравнения  $(2x^2)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ , зная два частных решения  $y_1 = 2x, y_2 = (x + 1)^2$ .
30. Решить уравнение  $x \frac{\partial u}{\partial x} + 3y \frac{\partial u}{\partial y} + 5z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ .

### Тесты для самостоятельной работы

#### Тест №1

#### по дифференциальным уравнениям

- I. Семейство линий  $y = Cx^3$  является общим решением дифференциального уравнения:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2}{y}$$

- 1)  $xy' = 3y$ ; 2)  $y^2 + y'^2 = 1$ ; 3)  $x^2y' - xy = yy'$ ; 4)  $y' = 3y^3$ ; 5)  $y = e$

- II. Выражение  $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$  - общий интеграл дифференциального уравнения:
- $$\sqrt{\quad}$$

1)  $xydx + (x + 1)dy = 0$ ; 2)  $y^2 + 1dx = xydy$ ; 3)  $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ ; 4)

$xy' + y = y^2$ ; 5)  $y' = 10^{x+y}$ .

III. Дифференциальное уравнение является однородным:

1)  $(x + 2y - 1)dx + xdy = 0$ ; 2)  $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ ; 3)  $(x + y)dx + (y - 1)dy = 0$ ;

4)  $(x^2 + y)dx - xydy = 0$ ; 5)  $(1 - x)dx + (x + y)dy = 0$ .

IV. Функция  $\mu(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$  - интегрирующий множитель дифференциального

уравнения:

1)  $(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0$ ; 2)  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ ;

3)  $(x^2 - y^2 + y)dx - xdy = 0$ ; 4)  $xy^2(xy' + y) = 1$ ; 5)  $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$ .

V. Дифференциальное уравнение  $(x + 1)y'' = \sqrt{y}$  имеет единственное решение при

начальных условиях:

1)  $x_0 = -1, y_0 < 0, y_0' - \text{любое}$ ; 2)  $x_0 = -1, y_0 > 0, y_0' - \text{любое}$ ; 3)  $x_0 \neq -1, y_0 = 0, y_0' = 1$ ;

4)  $x_0 = -1, y_0 = -2, y_0' = 0$ ; 5)  $x_0 = -1, y_0 = 0, y_0' = 0$ .

VI. Функция  $y = 0,25x^2$  является особым решением дифференциального уравнения:

1)  $y = 2xy' - 4y'^2$ ; 2)  $y = xy' - y'^2$ ; 3)  $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$ ; 4)  $xy' - y = \ln y'$ ; 5)

$x = y^2 + y'$ .

VII. Уравнение  $y'' - 2y' = 2e^x$  имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$y(1) = -1, y'(1) = 0$ :

1)  $y = (7 - 3x)e^{x-2}$ ; 2)  $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$ ; 3)  $y = e^{2x} - 3e^x - 1$ ; 4)  $y = e^{-x} - e + x - 1$ ;

5)  $y = -2x^2 + 4x + 1$ .

VIII. Выражение  $y = x^2e^x$  - частное решение (возможно более низкого порядка)

дифференциального уравнения:

1)  $y'' - 4y' + 5y = 0$ ; 2)  $y^{IV} + 2y' + y = 0$ ; 3)  $y'''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

IX. Система функций линейно зависима:

1)  $x + 2, x - 2$ ; 2)  $6x + 9, 8x + 12$ ; 3)  $\sin x, \cos x$ ; 4)  $1, x, x^2$ ; 5)  $e^x, e^{2x}, e^{3x}$ .

X. Уравнением Эйлера является:

1)  $x^2 y'' - 4y' + 6y = 0$ ; 2)  $x^2 y'' - 2y' - 3y = 0$ ; 3)  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ ;

4)  $x^3 y''' + x^2 y' - y = 0$ ; 5)  $(x - 2)^2 y'' - 3y' + 4y = 0$ .

XI. Функция  $y = x^3$  является решением уравнение:

1)  $x^2 y'' - 4y' + 6y = 0$ ; 2)  $x^2 y'' - 2y' - 3y = 0$ ; 3)  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ ;

4)  $x^3 y''' + x^2 y' - y = 0$ ; 5)  $(x - 2)^2 y'' - 3y' + 4y = 0$ .

XII. Функция  $f(x, y)$  не удовлетворяет условию Липшица по  $y$  на прямой  $y = -x$ :

1)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ; 2)  $f(x, y) = x + y$ ; 3)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ; 4)  $f(x, y) = 1 + x + \sqrt{y}$ ; 5)  $f(x, y) = 1 + x + y$ .

XIII. Расстояние между соседними нулями уравнения  $y'' + 2xy = 0$  на  $[20; 45]$  удовлетворяет оценкам:

1)  $0,5 < d < 1$ ; 2)  $0,33 < d < 0,5$ ; 3)  $0,2 < d < 0,3$ ; 4)  $0,1 < d < 0,2$ ; 5)  $0,31 < d < 0,33$ .

XIV. Нулевое решение системы устойчиво:

1)  $x' = x, y' = 2y$ ; 2)  $x' = 2x, y' = y$ ; 3)  $x' = -x, y' = y$ ; 4)  $x' = -x, y' = -2y$ ;

5)  $x' = x, y' = -y$ ;

XV. Особая точка  $(0, 0)$  системы является седлом:

1)  $x' = 3x, y' = 2x + y$ ; 2)  $x' = x + 3y, y' = -6x - 5y$ ; 3)  $x' = x, y' = 2x - y$ ; 4)

$x' = -2x - 5y, y' = 2x + 2y$ ; 5)  $x' = 3x + y, y' = y - x$ .

XVI. Выражение  $z = f(x^2 + y^2)$  есть общее решение уравнения:

1)  $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ; 2)  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ; 3)  $2y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ; 4)  $y \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ;

5)  $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

Тест №2

по дифференциальным уравнениям

I. Функция  $y = x + \sqrt{C + x^2}$ , где  $C \in R$ , является решением дифференциального уравнение:

1)  $(xy - 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$ ; 2)  $(xy + 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$ ; 3)  $(xy + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0$ .

II. Интегральные кривые уравнения  $xy' = 2y$  имеют вид: 1)  $xy = C$ ; 2)  $y = C + x^2$ ; 3)  $y = Cx^2$ .

III. Дифференциальное уравнение является однородным:

1)  $(x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0$ ; 2)  $x dy = (y + \sqrt{x^2 - y^2})dx$ ;  
3)  $(x + 2y)dx - (x + 1)dy = 0$ .

IV. Заменой  $z = y^{-1}$  к линейному приводится уравнение:

1)  $y^3 y' - xy = x$ ; 2)  $y' + x^2 y = xy^2$ ; 3)  $y^2 y' - xy = x^2$ .

V. Последовательные приближения  $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$  в задаче Коши  $y' = x - y^2, y(0) = 0$  имеют вид:

1)  $y_0(x) = 0, y_1(x) = 2x^2 = 2 + 10x$ ; 2)  $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x}{2}2^2, y_2(x) = \frac{x}{2}2^2 - 20\frac{x^5}{5}; \frac{x}{2}, y(x)$   
3)  $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x}{2}2^2, y_2(x) = \frac{x}{2}2^2 + 20\frac{x^4}{4}$ .

VI. Общим решением уравнения  $y''' - 1y'' = 0$  является:  $x$

1)  $y = x^2 + C_1x + C_2$ ; 2)  $y = C_1x + C_2$ ; 3)  $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$ .

VII. Определитель Вронского системы функций  $5, \cos^2 x, \sin^2 x$  равен:

1) 1; 2) -1; 3) 0.

VIII. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:

1)  $(x + y)dx + (x - y + 1)dy = 0$ ; 2)  $(2x + y)dx + (x - 3y + 4)dy = 0$ ;

3)  $\int \frac{y}{1+y} dx + \int \frac{y-1}{1-x} dy = 0$ .

IX. Функции  $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-2x}$  образуют фундаментальную систему решений уравнения:



1)  $y'' + 4y = 0$ ; 2)  $y'' - 4y = 0$ ; 3)  $y'' - 2y = 0$ .

X. Функция  $y = x^2$  является частным решением уравнения:

1)  $x^3 y''' - xy' - 3y = -5x^2$ ; 2)  $x^3 y''' - xy' - 3y = x^2$ ; 3)  $x^3 y''' + xy' - 3y = x^2$ .

XI. Общим решением системы  $\frac{dx}{dt} = x \sin t$ ,  $\frac{dy}{dt} = x e^{\cos t}$  является:

1)  $x = C_1 e^{\cos t}$ ,  $y = C_1 t + C_2$ ; 2)  $x = C_1 e^{-\cos t}$ ,  $y = C_1 t + C_2$ ; 3)  $x = C_1 e^{-\cos t}$ ,  $y = C_1 + C_2 t$ .

XII. Соотношение  $\phi = t^2 + 2xy$ , является первым интегралом системы уравнений:

1)  $\frac{dx}{dt} = -y$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{y-t}{x}$ ; 2)  $\frac{dx}{dt} = 2y$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2x$ ; 3)  $\frac{dx}{dt} = x - y$ ,  $\frac{dy}{dt} = y - 4x$ .

XIII. Выражение  $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$  есть общее

решение системы: 1)  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ; 2)

$\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

3)  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

□

XIV. Решения системы  $\frac{dx}{dt} = -x + \alpha y$ ,  $\frac{dy}{dt} = \alpha x - y$  асимптотически устойчивы, если:

1)  $-2 < \alpha < -1$ ; 2)  $1 < \alpha < 2$ ; 3)  $-1 < \alpha < 1$ .

XV. Функция  $V(x, y)$  является знакоопределённой:

1)  $V(x, y) = x^2 + y^2$ ; 2)  $V(x, y) = (x + y)^2$ ; 3)  $V(x, y) = x^2 - y^2$ .

XVI. Положение равновесия системы уравнений устойчивый узел:

1)  $\frac{dx}{dt} = x$ ,  $\frac{dy}{dt} = x + 2y$ ; 2)  $\frac{dx}{dt} = -3x + 2y$ ,  $\frac{dy}{dt} = x - 4y$ ; 3)  $\frac{dx}{dt} = 2y$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2x + 3y$ .

XVII. Функция  $z = x^3 + y^2 + 1$  есть решения уравнения:

1)  $\frac{\partial}{\partial x^2} z = 0$ ; 2)  $\frac{\partial}{\partial y^2} z = 0$ ; 3)  $\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} z = 0$ .

XVIII. Расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения  $y'' + \pi^2 y = 0$  равно:

1) 2; 2) 1; 3) 0,5.

### Тест №3

#### по дифференциальным уравнениям

I. Функция  $y = C\sqrt{1+C^2}$ , где  $C \in R$ , является решением дифференциального  $1 + C^2$  уравнение:

1)  $y + xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ ; 2)  $y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ ; 3)  $y - xy' = \frac{1+y'}{y}$ .

II. Интегральные кривые уравнения  $xy' = -y$  имеют вид: 1)  $y = Cx$ ; 2)  $y = C + x$ ; 3)  $xy = C$ .

III. Дифференциальное уравнение является линейным: 1)  $y = xy' + 1$ ; 2)  $y = xy' + y^2$ ; 3)  $yy' = x$ .

IV. Решением дифференциального уравнения  $y' + y = 2$  являются: 1)  $y = x$ ; 2)  $y = 2$ ; 3)  $y = -2$ .

V. Дифференциальное уравнение является однородным:

1)  $x^2\sqrt{y^2} dx + xdy = 0$ ; 2)  $x^2\sqrt{-y^2} dx + dy = 0$ ; 3)  $\sqrt{x^2 - y^2} dx + xydy = 0$ .

VI. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

1)  $(y^2 + 1)dx - xdy = 0$ ; 2)  $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ ; 3)  $(x - y)dx + (-x + y)dy = 0$ .

VII. Функция  $\mu(x, y) = \frac{1}{y}$  является интегрирующим множителем уравнения:  $x$

1)  $\frac{1}{y} (1 + \frac{x}{y}) dx + \frac{1}{y} (2xy + \frac{x}{y} + \frac{x}{y^2}) dy = 0$ ; 2)  $\frac{1}{y} (1 - \frac{x}{y}) dx + \frac{1}{y} (2xy + \frac{x}{y} + \frac{x}{y^2}) dy = 0$ ; 3)  $\frac{1}{y} (1 + \frac{x}{y}) dx + \frac{1}{y} (2xy + \frac{x}{y} + \frac{x}{y^2}) dy = 0$ .

$$(1 - xy) dx + (2xy - xy + xy^2) dy = 0.$$

□

VIII. Функция линейно зависима:

- 1)  $1, x$ ; 2)  $\sin x, \cos x$ ; 3)  $\sin^2 x, \cos^2 x$ .

IX. Функции  $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$  образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения:

- 1)  $y'' - y = 0$ ; 2)  $y'' + y = 0$ ; 3)  $y'' - 4y = 0$ .

X. Особая точка (положение равновесия) системы уравнения является седлом:

- 1)  $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y$ ; 2)  $\frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$ ; 3)  $\frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - 4y$ .

XI. Сколько особых точек (положений равновесия) имеет система уравнений -  $\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 5, \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 13$ :

- 1) 2; 2) 3; 3) 4.

XII. Функция  $V(x, y)$  является знакопостоянной:

- 1)  $V(x, y) = x^4 + y^4$ ; 2)  $V(x, y) = (x - y)^2$ ; 3)  $V(x, y) = x^2 - y^2$ .

XIII. Расстояние между соседними нулями любого (не тождественно равного нулю)  $y'' + \pi^4 y = 0$  равно: — решения уравнения  $y'' + \pi^4 y = 0$

- 1) 2; 2) 3; 3) 0,5.

XIV. С помощью функции  $V(x, y) = x^2 + y^2$  можно установить неустойчивость тривиального решения системы:

- 1)  $x' = -x, y' = -y$ ; 2)  $x' = -x + 2y, y' = -2x - y$ ; 3)  $x' = x - y, y' = -x + y$ .

XV. Особая точка системы  $\frac{dx}{dt} = x(x + y - 2), \frac{dy}{dt} = y(1 - x)$  является фокусом:

- 1)  $O_1(0,0)$ ; 2)  $O_2(1,1)$ ; 3)  $O_3(2,0)$ .

XVI. Функция  $u(x, y) = \ln x + \ln y$  является решением уравнения:

- 1)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2$ ; 2)  $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ ; 3)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ .

## **7. Фонд оценочных средств, для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### **7.1. Типовые контрольные задания**

#### Вопросы к экзамену

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Существование и единственность решения задачи Коши.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные уравнения первого порядка.
4. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли, Риккати.
5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
6. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Особые решения.
7. Простейшие типы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной (неполные уравнения).
8. Дифференциальные уравнения высших порядков. Случаи понижения порядка.
9. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.
10. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.
11. Построение однородного линейного уравнения по фундаментальной системе решений.
12. Понижение порядка однородного линейного уравнения при помощи линейно независимых частных решений.
13. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления.
14. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Функция Грина.
15. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности.
16. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений.
17. Линейные системы дифференциальных уравнений. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского.
18. Метод Эйлера решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.
19. Матричный метод решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.
20. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной.

21. Метод Эйлера решения неоднородных систем.
22. Нули решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.  
Теорема Штурма.
23. Теорема сравнения.
24. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Мультипликаторы.
25. Теорема о приводимости линейной системы.
26. Краевая задача для линейной системы. Функция Грина.
27. Периодические решения линейных систем.
28. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметров.
29. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам.
30. Метод малого параметра.
31. Решения периодических квазилинейных систем.
32. Устойчивость линейных систем.
33. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому линейному приближению.
34. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.
35. Теоремы о неустойчивости.
36. Общее решение, общий интеграл, независимые интегралы системы дифференциальных уравнений.
37. Автономные системы. Виды траекторий.
38. Качественное исследование плоских систем, точки покоя.
39. Предельные циклы автономных систем.
40. Общий интеграл. Теорема существования независимых интегралов автономной системы.
41. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
42. Представление решений в окрестности особой точки в виде обобщенных степенных рядов.
43. Уравнение Бесселя.
44. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши.
45. Однородные уравнения с частными производными первого порядка.
46. Теорема существования и единственности для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.
47. Неоднородные уравнения с частными производными.
48. Нелинейные системы уравнений с частными производными первого порядка 49.  
Уравнение Пфаффа.
50. Операционный метод решения линейных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений.

### Контрольная работа № 1

1. Решить уравнения

а)  $y'''(x-1) - y'' = 0$ ;

б)  $yy'' - y'^2 = yy' / \sqrt{1+x^2}$ ;

2. Решить задачу Коши  $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x + e^x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

3. Найти общее решение линейного однородного уравнения. Частное решение искать в виде многочлена или показательной функции.

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$$

### Контрольная работа № 2

1. Найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям  $x' = 5x + 5y$ ,  $y' = -4x + y$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

2. Решить систему матричным методом

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 12y - z, & y' &= \\ & x - 3y - z, & z' &= \\ & -4x + 12y + 3z. \end{aligned}$$

3. Найти общее решение системы  $x' = 4x - 3y + t^2$ ,  $y' = 3x + 4y - e^t$ .

### Вопросы к зачету:

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Общее и частное решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
2. Начальные условия, задача Коши.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Уравнения с однородной функцией.
5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнение в полных дифференциалах.
8. Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Общее и частное решения.
9. Уравнения, допускающие понижение степени.
10. Линейные однородные уравнения 2-го порядка. Общее решение. Определитель Вронского.

11. Однородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
12. Неоднородные линейные уравнения 2-го порядка. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
13. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов.
14. Линейные однородные уравнения высших порядков. Общее решение. Определитель Вронского.
15. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
16. Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
17. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Эквивалентность дифференциального уравнения и нормальной системы. Метод исключения.
18. Однородные нормальные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
19. Неоднородные нормальные системы дифференциальных уравнений. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
20. Устойчивые и неустойчивые решения систем дифференциальных уравнений.
21. Автономные нормальные системы. Состояния равновесия.
22. Типы состояний равновесия автономных систем 2-го порядка.
23. Прикладные задачи решаемые с помощью систем дифуравнений.
24. Однородные уравнения с частными производными первого порядка. 25. Неоднородные уравнения с частными производными второго порядка.

### Контрольные примеры

1. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых  $y = Cx^2 - x$
2. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых  $y = x^2 + Cx$
3. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых  $y = A \cos(x + \phi)$
4. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых  $y = (C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2})e^x$

5.. Построить приближенно интегральные кривые уравнений:

6. Построить приближенно интегральные кривые уравнений:  $y' = \frac{x+1}{1-y}$

7. Построить приближенно интегральные кривые уравнений:  $y' = x(y+1)$

8. Построить приближенно интегральные кривые уравнений:  $y' = 2x - 2y + 1$

9. Построить приближенно интегральные кривые уравнений:  $y' = 1 - yx$

10. Показать, что при всех значениях произвольной постоянной  $C$  функция  $y = y(x, C)$

является решением данного дифференциального уравнения:

$$(x^2 + x)y' - y(2x + 1) = 0, \quad y = C(x^2 + x)$$

11. Показать, что при всех значениях произвольной постоянной  $C$  функция  $y = y(x, C)$

является решением данного дифференциального уравнения  $y' - \frac{1}{x}y = 0, y = Cx$

$x$

12. Показать, что при всех значениях произвольной постоянной  $C$  функция

$y = y(x, C)$  является решением данного дифференциального уравнения  $y' - \frac{2}{x}y = 0,$

$$y = Cx^2$$

13. Показать, что при всех значениях произвольной постоянной  $C$  функция  $y = y(x, C)$

является решением данного дифференциального уравнения



$$y' - \frac{1}{x}y = 0, y = C(x+1)x + 1$$

14. Решить дифференциальное уравнение:  $y' = \sin 2x + x^2$

15. Решить дифференциальное уравнение  $y' = \cos 3x - \sqrt[3]{x^2}$

16. Решить дифференциальное уравнение  $y' = x \ln x + 1$

17. Решить дифференциальное уравнение  $y' = xe^x + 3x$

18. Решить дифференциальное уравнение, приводя его к дифференциальному уравнению с разделенными переменными

19. Решить дифференциальное уравнение, приводя его к дифференциальному уравнению с разделенными переменными  $(x^2 + 1)dy - 2xydx = 0$

21. Решить дифференциальное уравнение, приводя его к дифференциальному уравнению с разделенными переменными  $3y' - 2\sqrt{x}y = 0$

22. Решить дифференциальное уравнение, приводя его к дифференциальному уравнению с  $y$

$$dx + (x + 2)dy = 0$$

разделенными переменными

$$x - 2$$

23. Решить уравнения:  $x^2(x^2 + 4)y' = \cos^2 y$

24. Решить уравнения  $xy' \cos y + \sin y = \sin 2y$

25. Решить уравнения  $2xydx = (1 - x^2)dy$

26. Решить уравнения  $y' \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} y = 0$

27. С помощью линейной замены переменных привести уравнения к уравнению с разделенными переменными и решить  $(2x + y + 2)dx - (4x + 2y + 9)dy = 0$

28. С помощью линейной замены переменных привести уравнения к уравнению с разделенными переменными и решить

$$(2 - x - 2y)dx - 2(1 + x + 2y)dy = 0$$

29. С помощью линейной замены переменных привести уравнения к уравнению с разделенными переменными и решить  $(2y - x + 1)dx + (4y + 2x + 6)dy = 0$

30. С помощью линейной замены переменных привести уравнения к уравнению с разделенными переменными и решить  $(y - 3x + 2)dx + (3x - y - 1)dy = 0$

31. Решить задачу Коши  $(y + 2)y' = \sin 2x$ ,  $y(0) = 1$

32. Решить задачу Коши  $(e^x + 1)^2 y' + (e^{2x} - 1)y = 0$ ,  $y(0) = \frac{1}{4}$

33. Решить задачу Коши  $y' + 3y^2 = 3y$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$

34. Решить задачу Коши  $3x(x + 1)y' = (x + 2)y$ ,  $y(1) = -1$

35. Решить линейные уравнения первого порядка  $y' + y = 2e^x$

36. Решить линейные уравнения первого порядка  $xy' = y - 2x^2$

37. Решить линейные уравнения первого порядка  $xy' = x^2 + y$

38. Решить линейные уравнения первого порядка  $xy' + \frac{1}{x} = x^2 + y$

39. Решить уравнения Бернулли с помощью специальной подстановки, приводя его к  $y' =$

$$xy^2 + y$$

линейному уравнению  $X$

40. Решить уравнения Бернулли с помощью специальной подстановки, приводя его к линейному уравнению  $2xy' + 2y = x^2y^2$

41. Решить уравнения Бернулли с помощью специальной подстановки, приводя его к линейному уравнению  $y' = y^2 + \frac{y}{x}$

$x$

42. Решить уравнения Бернулли с помощью специальной подстановки, приводя его к линейному уравнению  $y' - y + 2xy^3 = 0$

43. Показать, что данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах и решить его:

$$(1 - 3x^2 - y)dx = (x - 3y^2)dy$$

44. Показать, что данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах и решить его  $(y^2 - 2x)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$

45. Показать, что данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах и решить его  $(y^2 + \ln x)dx + (2xy - \ln y)dy = 0$

46. Показать, что данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах и решить его  $(e^x + y)dx + (x + 2y \cos y^2)dy = 0$

47. Найдя интегрирующий множитель или сделав подходящую замену переменных, решить уравнение:

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

48. Найдя интегрирующий множитель или сделав подходящую замену переменных, решить уравнение  $(3x - y - 2x)\sqrt{3x - y - 2x}dx = (3x - y - 2y)dy$

49. Найдя интегрирующий множитель или сделав подходящую замену переменных, решить уравнение  $(2xy^2 + y)dx - (x^2y + 2xy)dy = 0$

50. Найдя интегрирующий множитель или сделав подходящую замену переменных, решить уравнение  $(y - 3x^2y^3)dx - (x + x^3y^2)dy = 0$

**7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум - 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов,

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

### а) основная литература

<p>1. Тихонов, Александр Николаевич. Дифференциальные уравнения : [учеб. для физ. специальностей и специальности "Прикладная математика"] / Тихонов, Александр Николаевич ; А.Б.Васильева, А.Г.Свешников; под ред. А.Н.Тихонова и др.; [Моск. гос. ун-т им. М.В.Ломоносова]. - 4-е изд., стер. - М. :Физматлит, 2005, 2002. - 253 с. : ил. ; 22 см. - (Курс высшей математики и математической физики. вып.6) (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 249-250. - Предм. указ.: с. 251-253. - ISBN 5-9221-0134-X : 126-28.</p>
<p>2. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко ; под ред. В.К.Романко. - М. : Лаб. Баз. Знаний: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 255,[1] с. - (Технический университет). - ISBN 5-93208-120-1 : 12700.</p>
<p>3. Филиппов, Алексей Фёдорович . Введение в теорию дифференциальных уравнений : [учеб. для вузов по группе физ.-мат. направлений и специальностей] / Филиппов, Алексей Фёдорович . - М. :Едиториал УРСС, 2004. - 238,[1] с. : ил. ; 22 см. - Библиогр.: с. 234-236. - Предм. указ.: с. 237-239. - Допущено МО РФ. - ISBN 5-354-00416-0 : 120-70.</p>
<p>4. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва :Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012</a> (17.10.2018).</p>

### б) дополнительная литература

<p>Егоров, Александр Иванович.</p> <p>Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / Егоров, Александр Иванович. - М. :Физматлит, 2005. - 384 с. : ил. ; 24 см. - Библиогр.: с.375-376.- Предм. указ.: с.377-380. - ISBN 5-9221-0385-7 : 350-00.</p>
<p>Эльсгольц, Л. Э.</p> <p>Дифференциальные уравнения : учебник / Л. Э. Эльсгольц. - 6-е изд. - М. :КомКнига, 2006. - 309 с. - (Классический учебник МГУ). - Допущено МО. - ISBN 5-484-00409-8 : 134-86.</p>
<p>Матвеев, Павел Николаевич.</p> <p>Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Матвеев, Павел Николаевич. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 330,[6] с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0571-8 : 278-52.</p>
<p>4. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В.А. Треногин. - Москва :Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82614">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82614</a> (17.10.2018).</p>

## 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer
4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ 5. Moodle [Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/>(датаобращения:).

## 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Рабочая программа по «Дифференциальным уравнениям» распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по математическому анализу рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

#### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 2 компьютерных класса и 2 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.