

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*Факультет математики и компьютерных наук*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Преобразование Радона**

*Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа фа-  
культета математики и компьютерных наук*

**Образовательная программа**

**01.04.01 - Математика**

**Направленность (профиль) программы**

**Дифференциальные уравнения**

**Уровень высшего образования**

**магистратура**

**Форма обучения**

**очная**

**Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую участниками  
образовательных отношений**

Махачкала, 2021

Рабочая программа дисциплины «Преобразование Радона» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.01 – математика (уровень магистратуры) от 10.01.2018 г. № 12

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Меджидов З.Г., к.ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена

на заседании кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа от 31.05.2021 г., протокол № 10.

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методического совета факультета математики и компьютерных наук 27.06.2021, протокол №6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением

« 9 » июля 2021 г.  Гасангаджијева А. Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Преобразование Радона» входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений по направлению 01.04.01 - Математика

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.*

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с математическими методами, применяемыми в современной томографии, принципами практического применения томографии, алгоритмами численного решения задач томографии.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных – ОПК-1, профессиональных – ПК-1, ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *контрольных работ и коллоквиумов, промежуточный контроль в форме зачета.*

Объем дисциплины 1 зачетная единица, в том числе в 36 академических часов, распределенных по следующим видам учебных занятий:

Се- местр	Учебные занятия						СРС	Форма промежу- точной ат- тестации (зачет, дифферен- цирован- ный зачет, экзамен)
	Все го	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лек- ции	Лабора- торные занятия	Практи- ческие занятия	КСР	консуль- тации				
8	108	6					30	Зачет

## **1. Цели освоения дисциплины**

Основной целью освоения курса является изучение современных методов неразрушающего исследования внутренней структуры объектов различной природы, основанных на принципах компьютерной томографии.

Достижению поставленной цели способствует решение следующих задач курса:

- усвоить основные методы обращения преобразования Радона функций двух и трех переменных, в том числе методы обращения по неполным данным;
- получить общее представление о математическом аппарате современной томографии;
- усвоить основные принципы практического применения томографии;
- изучить классические задачи томографии и алгоритмы их решения

## **2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры**

Дисциплина «Преобразование Радона» *входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений* по направлению 01.04.01 - Математика.

Изучение дисциплины «Преобразование Радона» предполагает хорошее знание теории преобразования Фурье, обобщенных функций, численных методов, основных разделов линейной алгебры, математического анализа, функционального анализа, интегральных уравнений.

Знания по данной дисциплине необходимы при работе над магистерской диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций (в соответствии с ОПОП)	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
<p><b>ОПК-1.</b> Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики</p>	<p><b>ОПК-1.1.</b> Обладает фундаментальными знаниями в области математики. <b>ОПК-1.2.</b> Умеет использовать фундаментальные знания в области математики в профессиональной деятельности. <b>ОПК-1.3.</b> Может осуществить выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p>	<p><i>Знает:</i> структуру задач в области интегральной геометрии, а также базовые составляющие таких задач. <i>Умеет:</i> анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. <i>Владеет:</i> навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин.</p>	<p>Контрольные работы, коллоквиум</p>
<p><b>ПК-1</b> Способность к интенсивной научно-исследовательской работе</p>	<p><b>ПК 1.1.</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук. <b>ПК 1.2.</b> Умеет использовать их в профессиональной деятельности. <b>ПК 1.3.</b> Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</p>	<p><i>Знает:</i> современные методы по сбору, обработке и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. <i>Умеет:</i> применять полученные навыки к математическому моделированию и выработке алгоритмов решения прикладных задач. <i>Владеет:</i> навыками проведения работы по сбору, обработке и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Контрольные работы, зачет</p>
<p><b>ПК-2</b> способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом</p>	<p><b>ПК-2.1</b> Знает основы современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. <b>ПК-2.2</b> Планирует популярные лекции, экскурсии и другие виды деятельности необходимые для формирования выводов по</p>	<p><i>Знает:</i> разные подходы к определению основных понятий математики; основные понятия информатики; формулировки математических утверждений при различных изменениях их исходных условий; различные языки программирования; <i>Умеет:</i> устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики и информатики необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	<p>Контрольные работы, коллоквиум, зачет</p>

	соответствующим научным исследованиям. <b>ПК-2.3</b> Проводит необходимую работу по собиранию, обработке и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<b>Владеет:</b> определенными навыками планирования и проведения работы по собиранию, обработке и интерпретированию данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	
--	---	--	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины составляет 1 зачетную единицу, 36 академических часов.

4.2. Структура дисциплины

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
<b>Модуль 1. Преобразование Радона</b>								
1. Определение и свойства преобразований Фурье и Радона.	3		2				8	коллоквиум
2. Формулы обращения	3		1				8	контрольная работа
3. Восстановление по данным на трехмерных комплексах прямых	3		1				8	контрольная работа
4. Алгоритм свертки и обратной проекции	3		1				6	коллоквиум
<b>Всего по модулю 1</b>			<b>6</b>				<b>30</b>	
<b>ИТОГО</b>			<b>6</b>				<b>30</b>	<b>зачет</b>

### **4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)**

#### **ЛЕКЦИИ**

##### **Модуль 1. Преобразование Радона**

Тема 1. Определение и свойства некоторых интегральных преобразований

Преобразование Радона, лучевое и веерное преобразование скалярных и векторных полей. Их связь с преобразованием Фурье. Преобразование Радона с учетом поглощения.

Тема 2. Формулы обращения

Обращение преобразования Абеля. Формулы обращения преобразования Радона, лучевого и веерного преобразований. Восстановление сферически симметричной функции. Формула Кормака. Функции с ограниченным спектром. Теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона. Теорема отсчетов с пропущенным интервалом.

Тема 3. Восстановление по данным на трехмерных комплексах прямых

Проблема переопределенности данных по размерности. Примеры трехмерных комплексов прямых. Теорема Гранжа. Обращение лучевого преобразования сведением к преобразованию Радона.

Тема 4. Алгоритм свертки и обратной проекции

Схема алгоритма восстановления, основанного на формуле обращения преобразования Радона на плоскости. Примеры фильтров. Условие Найквиста.

##### **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы аспирантов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

##### **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

1. Паламодов В.П. Интегральная геометрия и компьютерная томография. Специальный курс. М.: Изд-во МК НМУ, 1997.

2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
3. Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.

### **Перечень вопросов для самостоятельной работы**

1. Томография: определение, области приложения. Примеры.
2. Уравнение томографии. Его вывод для задачи классической рентгеновской томографии.
3. Преобразование Абеля. Формула его обращения.
4. Преобразование Радона: формулировка, основные свойства.
5. Связь преобразования Радона и преобразования Фурье. Теорема проекций.
6. Лучевое преобразование в трёхмерном пространстве. Условия полноты данных. Примеры комплексов прямых.
7. Вывод формулы обращения двумерного преобразования Радона.
8. Обращение по данным в неполном угловом диапазоне.
9. Теоремы Пэли-Винера.
10. Теорема отсчетов с пропущенным интервалом.
11. Общая характеристика алгоритмов фильтрации и обратного проецирования (двумерный случай).
12. Процедура фильтрации одномерных проекций. Примеры фильтров.
13. Дискретизация задачи томографии.
14. Алгебраические алгоритмы восстановления.
15. Итерационный алгоритм ART.
16. Преобразование Радона с учётом поглощения излучения и его обращение.

### **Рефераты и доклады по темам для самостоятельной работы**

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
<b><i>Модуль 1. Преобразование Радона и другие интегральные преобразования</i></b>	
1. Определение и свойства некоторых интегральных преобразований	Доклад на тему: «Непрерывность операторов интегральной геометрии в пространствах квадратично суммируемых функций»
2. Формулы обращения.	Доклад на тему: «Метод обращения Радона» Доклад на тему: «Теоремы Пэли-Винера для преобразования Радона»
3. Восстановление по данным на трехмерных комплексах прямых	Доклад на тему: «Восстановление векторного поля по заданным интегралам вдоль

	прямых, пересекающих данную кривую»
4. Алгоритм свертки и обратной проекции	Доклад на тему: «Оценка ошибки дискретизации свертки и обратной проекции»

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

### 7.1. Типовые контрольные задания

#### Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Первые задачи интегральной геометрии.
2. Принцип рентгеновской томографии. Определение преобразования Радона.
3. Пространство Шварца. Обращение преобразования Радона радиально симметричных функций.
4. Доказательство формулы обращения, принадлежащее Радону.
5. Преобразование Фурье на прямой и плоскости.
6. Теорема проекций и основанная на ней схема обращения преобразования Радона.
7. Метод Кормака обращения преобразования Радона.
8. Образ преобразования Радона. Условия Кавальери.
9. Теоремы Пэли-Винера для преобразования Радона.
10. Проблема обращения преобразования Радона по неполным данным. Функции с ограниченным спектром. Теорема Пэли-Винера в пространстве  $L_2$ .
11. Теорема Котельникова.
12. Обобщенные функции и действия над ними.
13. Регуляризация обобщенных функций.
14. Алгоритм свертки и обратной проекции обращения преобразования Радона.
15. Формула Пуассона для преобразования Радона и дискретное преобразование Радона.

#### Примерный вариант контрольной работы

1. Найти преобразование Радона следующих функций:

$$a. f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 1 \end{cases};$$

$$b. f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2};$$

$$c. f(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

2. Доказать формулу обращения преобразования Фурье в пространстве Шварца.

3. Доказать, что преобразование Фурье взаимно однозначно отображает пространство Шварца на себя.

4. Доказать, что функция  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , принадлежит пространству Шварца  $S$ .

5. Доказать, что если  $\varphi(x) \in S$ , то функции  $\varphi^{(n)}(x)$  для любого  $n \geq 0$  абсолютно интегрируемы на всей прямой  $\mathbb{R}$ .

6. Верно ли, что  $e^x \varphi(x) \in S(\mathbb{R})$  для  $\forall \varphi \in S$ ?

7. Верно ли, что  $x^n \varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  для  $\forall \varphi \in S$ ?

8. Используя формулу предыдущей задачи, доказать для  $\varphi \in S$  формулу суммирования Пуассона:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k).$$

9. Вычислить преобразование Фурье следующих функций:

a.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [a; b], \\ 0, & \text{при } x \notin [a; b]; \end{cases}$

b.  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ ;

c.  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ ;

d.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ;

e.  $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 1. \end{cases}$

10. Для функций  $f, g \in S$  доказать тождество  $F[f \cdot g] = F[f] * F[g]$ .

11. (Аналог теоремы отсчетов) Доказать, что для  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } f \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  выполняется равенство

$$f(x) = \sum_k f\left(\frac{k}{l}\right) s\left(x - \frac{k}{l}\right),$$

где  $s$  – преобразование Фурье функции  $h$ , равной 1 на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и

нулю вне отрезка  $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ .

12. Пусть финитная функция  $\varphi(x)$  такова, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$ . Доказать, что последовательность  $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$  – дельтообразная.

13. Вычислить преобразование Фурье следующих обобщенных функций:  
 1)  $\delta(x)$ ; 2) 1; 3)  $\text{sign } x$ ; 4)  $x$ ; 5)  $|x|$ ; 6)  $\theta(x)$ .

14. Доказать свойства функций с ограниченным спектром:

а. Если  $f$  – функция с ограниченным спектром и имеется последовательность точек такая, что  $f(x_k) = 0$  и  $x_k \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$  ( $x_k \neq x_j$  при  $k \neq j$ ), то  $f \equiv 0$ .

б. Если  $f$  – функция с ограниченным спектром, то  $f'$  – также функция с ограниченным спектром, и  $f'$  ограничена на  $\mathbb{R}$ .

15. Вычислить экспоненциальное преобразование Радона следующих функций:

а. 
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 1 \end{cases}$$

б. 
$$f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2};$$

с. 
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

### а) основная литература

4. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
5. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: ДОБРОСВЕТ, 2010.
6. Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
8. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
9. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

### б) дополнительная литература

1. Терещенко С.А. Методы вычислительной томографии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: МГУ, 1984.
3. Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е. Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.
4. Grangeat P. Mathematical framework of cone-beam 3D-reconstruction via the first derivative of the Radon transform. // Proc. of a Conf. On Mathematical Methods in Tomography. Oberwolfach, Germany. 1990. P. 66-97.
5. Palamodov V. P. Reconstructive Integral Geometry. Tel Aviv University, 2003.
6. Tuy H.K. An inversion formula for cone-beam reconstruction. // SIAM J. Applied Mathematics. 1983. V.43. No.3. P.546-552.

### **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Федеральный портал <http://edu.ru>:
2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ  
<http://elib.dgu.ru>:  
<http://edu.icc.dgu.ru>:

### **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по математическим методам компьютерной томографии рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

### **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой оснащенных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины теория интерполирования. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.