

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Дифференциальная геометрия

Кафедра: дифференциальных уравнений и функционального анализа
Факультет: математики и компьютерных наук

Образовательная программа
44.03.01 – Педагогическое образование

Направленность (профиль) программы
«Математика»

Программа подготовки:
академический бакалавриат

Форма обучения:
заочная

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений: модуль общематематический; дисциплина по выбору

Махачкала 2021


Рабочая программа дисциплины «Дифференциальная геометрия» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата) от 22.02.2018 №121.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,
Рагимханов В.Р., к. ф.-м. н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2021г.,
протокол № 6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «_09_» июля 2021г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Дифференциальная геометрия» является дисциплиной по выбору и входит в формируемую участниками образовательных отношений часть ОПОП (общематематический модуль) по направлению **44.03.01 Педагогическое образование**.

Дисциплина реализуется на *факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с так называемыми классическими вопросами дифференциальной геометрии: регулярными кривыми на плоскости и пространстве, регулярными поверхностями в трехмерном пространстве, понятиями кривизны кривой и поверхности; первыми и вторыми фундаментальными формами на регулярных поверхностях.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
универсальная компетенция (УК): УК-1;
профессиональная компетенция (ПК): ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме зачета.*

Объем дисциплины 2 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Курс/Сессия	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	в том числе						
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем				СРС, в том числе промежуточная аттестация	
		Всего	из них				
Лекции	Практические занятия		КСР	консультации			
5/3	72	16	8	8		52+4	зачет
Итого	72	16	8	8		56	

1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины «Дифференциальная геометрия» является:

- 1) овладение студентами математическим аппаратом классической дифференциальной геометрии, фундаментальными теоретическими положениями этих теорий;
- 2) воспитание и развитие их математической культуры;

- 3) осознание ими прикладного характера математики в целом и дифференциальной геометрии, в частности.

Вместе с тем, изучение дисциплины «Дифференциальная геометрия» преследует и следующие частные цели:

- 1) обеспечение понятийной базы для изучения других предметов, использующих геометрию в качестве поставщика необходимого математического аппарата (математический и функциональный анализ, теория дифференциальных уравнений, теоретическая физика, геометрия «в целом», и др.), и дальнейшего самостоятельного изучения математики;
- 2) воспитание и развитие их математической культуры;
- 3) осознание ими прикладного характера математики в целом и дифференциальной геометрии, в частности.
- 4) формирование более широкого и глубокого понимания важнейших геометрических структур, повсеместно используемых в математике;
- 5) сопровождение теоретического материала разнообразными задачами и упражнениями для самостоятельного решения, позволяющими более глубоко прочувствовать теоретические положения дисциплины и развить у студентов навыки самостоятельной работы.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «*Дифференциальная геометрия*» является дисциплиной по выбору и входит в формируемую участниками образовательных отношений часть ОПОП (общематематический модуль) по направлению *44.03.01 Педагогическое образование*.

Классическая ветвь математики – дифференциальная геометрия — является разделом современной математики, без знания которых невозможно представить квалифицированного бакалавра–математика. Современные дифференциальная геометрия используются как для решения теоретических вопросов математики, так и для решения прикладных математических задач.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях общеобразовательных программ по следующим дисциплинам: математика, геометрия, алгебра и начала анализа. Для освоения дисциплины, обучающиеся используют знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения дисциплин обязательной части ОПОП бакалавриата и части, формируемой участниками образовательных отношений, в частности, таких как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ» и «Линейная алгебра». Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины «Дифференциальная геометрия», используются в дальнейшем при освоении дисциплин части, формируемой участниками образовательных отношений: «Физика», «Компьютерная геометрия», «Вычислительная геометрия» и при прохождении практик и при подготовке к итоговой государственной аттестации.

Всё это показывает важность и актуальность изучения дифференциальной геометрии подготовки квалифицированных бакалавров по направлению *44.03.01 Педагогическое образование*.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
<p>УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	<p>УК-1.1. Анализирует задачу, демонстрируя знание особенностей системного, критического и логического мышления; применяет логические формы и процедуры; выделяет этапы ее решения.</p>	<p>Знает: основные принципы и методы критического анализа. Умеет: получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; Владеет: способностью исследовать проблемы, связанные с профессиональной деятельностью, с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.</p>	<p>Конспектирование и проработка лекционного материала. Участие в практических занятиях. Самостоятельная работа.</p>
	<p>УК-1.2. Находит и критически анализирует источники информации; сопоставляет разные источники с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений; выбирает информацию, необходимую для решения поставленной</p>	<p>Знает: методы поиска источников информации и анализа проблемной ситуации. Умеет: собирать информацию по научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск решений проблемы; сравнивать преимущества разных вариантов решения</p>	

	задачи. УК-1.3. Рассматривает разные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.	проблемы и оценивать их риски. Владеет: способностью выявлять научные проблемы и выбирать адекватные методов для их решения; способностью исследовать проблемы профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности.	
	УК-1.4. Аргументированно формирует собственное суждение и принимает обоснованное решение, определяет практические последствия предложенного решения задачи.	Знает: принципы и методы оценки источников информации и современных научных достижений. Умеет: демонстрировать оценочные суждения в решении проблемных профессиональных ситуаций. Владеет: методами оценки надежности источников информации, методами работы с противоречивой информацией из разных источников.	
ПК-2 Способен применять предметные знания при реализации образовательного процесса	ПК-2.1. Способен определять содержание математического образования школьников, адекватное ожидаемым результатам, уровню развития современной математики и возрастным особенностям обучающихся ПК-2.2. Проектирует элементы образовательной программы, рабочую программу учителя по математике	Знает: требования к организации образовательного процесса по математике; структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного предмета «Математика» Умеет: формулировать дидактические цели и задачи обучения математике и реализовывать их в образовательном процессе; планировать и реализовывать различные организационные средства и формы в процессе обучения математики	Конспектирование и проработка лекционного материала. Участие в практических занятиях. Самостоятельная работа.

	ПК-2.3. Способен осуществлять обучение учебному предмету на основе использования предметных методик и применения современных образовательных технологий	(урок, экскурсию, домашнюю, внеклассную и внеурочную работу); обосновывать выбор методов обучения математике и образовательных технологий, исходя из особенностей содержания учебного материала, возраста и образовательных потребностей обучаемых. Владеет: предметным содержанием математики; умениями отбора вариативного содержания с учетом взаимосвязи урочной и внеурочной форм обучения математике; умениями по планированию и проектированию образовательного процесса; способностью применять различные методы обучения и современные образовательные технологии в образовательном процессе в области математики	
--	---	--	--

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 2, академических часов 72.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Курс/Сессия	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			всего	лекции	практ. занятия	Контр. сам. раб.		
Модуль 1. Теория кривых								
<i>Всего по модулю 1</i>	5/3		36	4	4		28	Контрольная работа, коллоквиум
1. Предмет и метод дифференциальной	5/3		10	1	1		8	

геометрии. Понятие кривой.								
2. Длина и кривизна кривой.	5/3		14	2	2		10	
3. Кручение кривой. Формулы Френе	5/3		12	1	1		10	
Модуль 2. Теория поверхностей								
Всего по модулю 2	5/3		36	4	4		24+4	Контрольная работа, коллоквиум
1. Понятие поверхности. Регулярные поверхности	5/3		10	1	1		8	
2. Внутренняя геометрия поверхности	5/3		12	2	2		8	
3. Внешняя геометрия поверхности.	5/2		10	1	1		8	
Итоговый контроль	5/2						4	Зачет
ИТОГО			72	8	8		52+4	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Пятый семестр, вторая сессия

Модуль 1. Теория кривых

Тема 1. Предмет и метод дифференциальной геометрии. Понятие кривой

Предмет и история классической дифференциальной геометрии. Обзор проблем и методов современной дифференциальной геометрии. Вектор-функции скалярного аргумента. Непрерывность и дифференцируемость вектор-функции скалярного аргумента. Трудности, связанные с определением понятия кривой. Регулярные кривые. Касательная к кривой

Тема 2. Длина и кривизна кривой

Естественная параметризация регулярной кривой. Примеры естественных перепараметризаций. Длина кривой. Плоские кривые. Способы задания плоских кривых. Касание плоских кривых. Огибающие. Кривизна плоской кривой. Формулы Френе для плоских кривых.

Тема 3. Кручение кривой. Формулы Френе

Пространственные кривые. Способы задания пространственных кривых. Кривизна и кручение пространственных кривых. Базис Френе (естественный трехгранник пространственной кривой). Формулы Френе для пространственной кривой.

Модуль 2. Теория поверхностей

Тема 1. Понятие поверхности. Регулярные поверхности

Понятие поверхности. Способы задания поверхности. Регулярные поверхности. Примеры поверхностей.

Тема 2. Внутренняя геометрия поверхности

Касательная плоскость к поверхности. Касательное расслоение поверхности. Первая квадратичная форма поверхности как способ вычисления скалярного произведения

касательных векторов поверхности. Длина кривой на поверхности. Углы на поверхности. Площадь поверхности. Изометричность поверхностей.

Тема 3. Внешняя геометрия поверхности

Нормальное гауссово поле. Дифференциал нормального отображения. Основной оператор поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Главные кривизны поверхности. Гауссова кривизна поверхности. Главные направления поверхности.

4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине

Пятый семестр, вторая сессия

Модуль 1. Теория кривых

Тема 1. Предмет и метод дифференциальной геометрии. Понятие кривой

Предмет и история классической дифференциальной геометрии. Обзор проблем и методов современной дифференциальной геометрии. Вектор-функции скалярного аргумента. Непрерывность и дифференцируемость вектор-функции скалярного аргумента. Трудности, связанные с определением понятия кривой. Регулярные кривые. Касательная к кривой

Тема 2. Длина и кривизна кривой

Естественная параметризация регулярной кривой. Примеры естественных перепараметризаций. Длина кривой. Плоские кривые. Способы задания плоских кривых. Касание плоских кривых. Огибающие. Кривизна плоской кривой. Формулы Френе для плоских кривых.

Тема 3. Кручение кривой. Формулы Френе

Пространственные кривые. Способы задания пространственных кривых. Кривизна и кручение пространственных кривых. Базис Френе (естественный трехгранник пространственной кривой). Формулы Френе для пространственной кривой.

Модуль 2. Теория поверхностей

Тема 1. Понятие поверхности. Регулярные поверхности

Понятие поверхности. Способы задания поверхности. Регулярные поверхности. Примеры поверхностей.

Тема 2. Внутренняя геометрия поверхности

Касательная плоскость к поверхности. Касательное расслоение поверхности. Первая квадратичная форма поверхности как способ вычисления скалярного произведения касательных векторов поверхности. Длина кривой на поверхности. Углы на поверхности. Площадь поверхности. Изометричность поверхностей.

Тема 3. Внешняя геометрия поверхности

Нормальное гауссово поле. Дифференциал нормального отображения. Основной оператор поверхности. Вторая фундаментальная форма поверхности. Главные

кривизны поверхности. Гауссова кривизна поверхности. Главные направления поверхности.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины Дифференциальная геометрия и топология лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Учебно-методические пособия для самостоятельной работы

1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Насрулаев Ф.С. Дифференциальная геометрия и топология: для студ. 2-го года обуч. фак-та математики и компьют. наук. Ч.1: Дифференциальная геометрия. Теория кривых. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2015. - 20-00.
4. Сизый, С.В. Лекции по дифференциальной геометрии: учебное пособие для математических специальностей и направлений подготовки в университетах – М.: Физматлит, 2007. - 377.

Задания для самостоятельной работы

1. Классические поверхности.
2. Внутренняя и внешняя геометрия поверхности.
3. Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
4. Классические кривые.
5. Теорема Гаусса.
6. Эволюта и эвольвента.
7. Огибающая семейства кривых.
8. Примеры гладких многообразий.
9. Касательное и кокасательное расслоения.
10. Дифференциальные формы.
11. Дифференциальные формы в R^n .
12. Теорема Стокса.

Вопросы для самопроверки и подготовки к экзамену:

1. Что такое вектор-функция скалярного аргумента?
2. При каком условии вектор-функция скалярного аргумента определяет кривую в пространстве?
3. Вывести уравнения эволюты и эвольвенты плоской кривой.
4. Сформулировать определение предела вектор-функции.
5. Что такое натуральный параметр кривой?
6. Записать и объяснить формулы Френе.
7. Каким свойством обладает единичная вектор-функция?
8. Записать вычислительные формулы для кривизны и кручения пространственной кривой.
9. В чем состоит геометрический смысл кривизны и кручения?
10. Что называется вектор-функцией двух скалярных аргументов?
11. Дать определение частных производных от вектор-функции двух скалярных аргументов. Как они вычисляются?
12. При каком условии вектор-функция двух скалярных аргументов определяет поверхность в пространстве?
13. Что такое первая квадратичная форма поверхности и какие задачи решаются с ее использованием?
14. Как находятся коэффициенты второй квадратичной формы?
15. Дать определение полной и средней кривизн поверхности. Записать вычислительные формулы.

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Раздел 1. Теория кривых	
1. Замечательные плоские кривые	Рефераты на темы: 1. Циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды 2. Плоские кривые и механизмы
2. Некоторые классы пространственных кривых	1. Кривые постоянной кривизны 2. Сферические кривые 3. Кривые Бертрана
3. Визуализация плоских кривых в системах компьютерной алгебры	1. Визуализация и анимация в зависимости от различных параметров кривых в СКА Maple или Mathematica
Раздел 2. Теория поверхностей	
1. Кривизны поверхности	Доклад на тему: Поверхности постоянной кривизны
2. Визуализация поверхностей в 3D редакторе Blender	Представить на компьютере результаты визуализации некоторых поверхностей
3. Визуализация поверхностей в системах компьютерной алгебры	Представить на компьютере результаты визуализации некоторых поверхностей
Раздел 3. Общая топология	
1. Компактные и связные ТП	Рефераты на темы: 1. Критерий компактности в полных метрических пространствах. 2. Компактность, счетная компактность, и секвенциальная компактность.

2. Фундаментальная группа	Вычисление фундаментальных групп различных пространств. Доклад на тему: Зейферта – ван Кампена
3. Гладкие многообразия	Доклад на тему: Различные подходы к определению гладкого многообразия.
4. Гладкие отображения	Решение задач и упражнений на вычисление ранга гладких отображений

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Типовые контрольные задания

7.1.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму

1. Гладкие кривые. Параметризации. Касательная, прямая.
2. Гладкие поверхности. Способы задания.
3. Координаты на поверхности, координатные линии. Геометрия гладких кривых, касательных векторов, во внутренних координатах.
4. Карты участков поверхности, связи между ними (преобразования координат). Понятие диффеоморфизма. Матрица Якоби как матрица перехода между локальными базисами.
5. Касательная плоскость, ее уравнения для разных способов задания поверхности. Расстояния до касательной плоскости.
6. Вектор скорости и длина дуги кривой. Натуральный параметр.
7. Кривизна кривой.
8. Соприкасающиеся плоскость и окружность.
9. Кривизна-плоской кривой.
- 10.Трехгранник Френе и кручение кривой.
- 11.Формулы Френе.
- 12.Геометрический смысл кручения.
- 13.Вращение трехгранника Френе.
- 14.Вычислительные формулы для кривизны и кручения.
- 15.Натуральные уравнения плоских и пространственных кривых.
- 16.Метрика поверхности (первая квадратичная форма).
- 17.Длины и углы кривых, площади во внутренних координатах.
- 18.Вид метрики при разных способах задания поверхности.
- 19.Зависимость выражения метрики от системы координат.
- 20.Кривизны и центры кривизны линий на поверхности, имеющих общий касательный вектор (теорема Менье).
- 21.Кривизны нормальных сечений поверхности в точке.
- 22.Главные кривизны и направления.
- 23.Вторая квадратичная форма поверхности.
- 24.Главные кривизны и направления как инварианты второй квадратичной формы.
- 25.Формула Эйлера.
- 26.Гауссова кривизна и ее геометрический смысл.
- 27.Средняя кривизна.
- 28.Вычислительные формулы для главных кривизн и направлений (для разных способов задания поверхности).

7.1.2. Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

1. Какой угол образует касательная к кривой $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \sin \frac{t}{2}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$ с осью Oz
- 1) $\frac{\pi}{6}$,
 - 2) $\frac{\pi}{3}$,
 - 3) $\frac{\pi}{4}$,
 - 4) $\frac{\pi}{2}$,
 - 5) $\frac{2}{3} \pi$.
2. Найти соприкасающиеся плоскости кривой $x = t, y = t^2, z = t^3$, проходящие через точку $M_0\left(2, -\frac{1}{3}, -6\right)$
- 1) $x + y + z + 1 = 0; \quad 3x - 3y + 2z - 1 = 0; \quad x - 18 + z - 1 = 0;$
 - 2) $2x + y + 3z - 1 = 0; \quad x - y + 2z + 1 = 0; \quad 108x + 18y - z + 3 = 0;$
 - 3) $3x + 3y + z + 1 = 0; \quad 3x - 3y + z - 1 = 0; \quad 108x - 18y + z - 216 = 0.$
3. Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой $x = t \sin t, y = t \cos t, z = t^t$ в начале координат.
- 1) $\bar{\tau} = \frac{\bar{l}_1 + \bar{l}_2}{\sqrt{2}}, \bar{\gamma} = \frac{\bar{l}_1 - \bar{l}_3}{\sqrt{3}}, \bar{\beta} = \frac{\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3}{\sqrt{6}};$
 - 2) $\bar{\tau} = \frac{\bar{l}_2 + \bar{l}_3}{\sqrt{2}}, \bar{\gamma} = \frac{2\bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_3}{\sqrt{6}}, \bar{\beta} = \frac{\bar{l}_1 + \bar{l}_2 - \bar{l}_3}{\sqrt{3}};$
 - 3) $\bar{\tau} = \frac{\bar{l}_1 + \bar{l}_3}{\sqrt{3}}, \bar{\gamma} = \frac{\bar{l}_2 - \bar{l}_3}{\sqrt{2}}, \bar{\beta} = \frac{2\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3}{\sqrt{6}}.$
4. Написать параметрические уравнения поверхности, образованной касательными к винтовой линии $x = a \cos u, y = a \sin u, z = bu$.
- 1) $x = a \cos u - v \sin u; \quad y = a \sin u + v \cos u; \quad z = bu;$
 - 2) $x = a(\cos u - v \sin u); \quad y = a(\sin u + v \cos u); \quad z = (u + v);$
 - 3) $x = a(\cos u + v \sin u); \quad y = a \sin u + v \cos u, \quad z = bv.$
5. Найти ортогональные траектории семейства линий $u + v = \cos t$ лежащих на сфере $x = R \cos u \cos v, y = R \cos u \sin v, z = R \sin u$.
- 1) $u + v = \text{const};$
 - 2) $u - v = \text{const};$
 - 3) $u + \text{tg} v;$
 - 4) $v - \text{tg} u = \text{const};$

5) $u + \cos v = \text{const}.$

6. Найти главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = u \cos v$,
 $y = u \sin v$, $z = av$.

1) $\frac{du}{dv} = \pm \sqrt{u^2 - a^2}$; $k_{\text{н}}^1 = -k_{\text{н}}^2 = \frac{a}{u + a}$;

2) $\frac{du}{dv} = \pm \sqrt{u^2 + a^2}$; $k_{\text{н}}^1 = -k_{\text{н}}^2 = \frac{a}{u^2 + a^2}$;

3) $\frac{du}{dv} = \pm au$; $k_{\text{н}}^1 = -k_{\text{н}}^2 = \frac{a}{u^2 - a^2}$.

7. Найти точки на кривой $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$, в которых кривизна имеет минимальное значение (локальное).

1) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, 2) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, 3) $\frac{\pi}{4} + k\pi$, 4) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{2}{3}\pi + k\pi$, где $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7.1.3. Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов

1. Предмет и метод дифференциальной геометрии.
2. Вектор-функция скалярного аргумента. Предмет, непрерывность, производная.
3. Понятие кривой. Элем. кривая. Параметризация кривой.
4. Регулярные кривые. Обыкновенная точка регулярной кривой.
5. Касательная кривой. Теорема о существовании и единственности касательной.
6. Уравнения касательной в векторной в векторной и коор.-й формах.
7. Соприкасающаяся плоскость кривой. Уравнения соприкасающейся плоскости для различных случаев аналитического задания кривой.
8. Нормаль кривой. Главная нормаль, бинормаль кривой; их уравнения.
9. Естественная параметризация кривой. Доказать, что $|r^{-1}(s)| = 1$.
10. Кривизна кривой. Доказать, что при естественной параметризации кривой $K_1 = |r^{-1}(s)|$. Вычисление кривизны кривой произвольной ее параметризации.
11. Что представляет собой кривая, у которой в каждой точке $K_1 = 0$?
12. Единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали при естественной параметризации кривой.
13. Абсолютное кручение кривой. Доказать, что при естественной параметризации кривой $|K_2| = \frac{|r^{-1}(s)r^{111}(s)|}{K_1^2(s)}$.
14. Кручение кривой. Найти все кривые, у которых в каждой точке кручение равно нулю. Вычисление кручения кривой при произвольной ее параметризации.
15. Формулы Френе. Строение кривой в окрестности обыкновенной точки.
16. Элементарная поверхность. Параметрические уравнения элементарной поверхности.
17. Регулярная поверхность. Обыкновенные точки на регулярной поверхности.

18. Касательная плоскость поверхности. Теорема о существовании и единственности.
19. Уравнения касательной плоскости для различных случаев задания поверхности. Нормали поверхности.
20. Первая основная квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности.
21. Угол между кривыми на поверхности.
22. Критерий ортогональности координатной сети на поверхности.
23. Вторая основная квадратичная форма поверхности.
24. Кривизна кривой, лежащей на поверхности.
25. Теорема Менье. Геометрический смысл нормальной кривизны поверхности в данной точке, в данном направлении.
26. Индикатриса кривизны. Классификация точек поверхности.
27. Асимпт. направления. Сохраненные направления.
28. Главные направления. Главные кривизны.
29. Вычисление главных кривизн поверхности в случае произвольной ее параметризации.
30. Внутренняя геометрия поверхности. Геодезическая кривизна кривой на поверхности.

7.1.4. Примерные варианты контрольных работ по дисциплине

Вариант № 1.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$r = r(u, v) = \{2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3\}$$
 в точке $M_0(3, 5, 7)$.
2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, b \operatorname{sh} u\}.$$
3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: u + v = 2$ и $\gamma_2: v - u = 0$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u, u^2 - 2v, u^3 - 3uv\}.$$

Вариант № 2.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = \frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2)$$
 в точке $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4} - \ln 2\right)$.
2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{4 \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v, 3 \operatorname{cos} u \operatorname{sin} v, 2 \operatorname{sin} u\}.$$
3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: 2u - v = 0$ и $\gamma_2: v - u = 1$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u^2, 2u - v^2, 2\sqrt{u} + v\}.$$

Вариант № 3.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$r = r(u, v) = \{u, u^2 - 2v, u^3 - 3uv\}$$
 в точке $M_0(1, 3, 4)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, av\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: 2u - v = 1$ и $\gamma_2: v - u = 3$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u^2, 2u - v^2, 2\sqrt{u} + v\}.$$

Вариант № 4.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$\ln x + y + xyz - \frac{\pi}{4} = 0$$

в точке $M_0(1, 1, 0)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{(4 + 2\cos u)\cos v, (4 + 2\cos u)\sin v, 2\sin u\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: u - v = 2$ и $\gamma_2: 2u + v = 1$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2\}.$$

Вариант № 5.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$r = r(u, v) = \{u^2, 2u - v^2, 2\sqrt{u} + v\}$$

в точке $M_0(1, -2, 4)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{2 \operatorname{ch} \frac{u}{2} \cos v, 2 \operatorname{ch} \frac{u}{2} \sin v, u\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: u + v = 2$ и $\gamma_2: v - u = 0$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u, u^2 - 2v, u^3 - 3uv\}.$$

Вариант № 6.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = e^{x+y} + \arcsin xy$$

в точке $M_0(1, 0, e)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, u\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: u + v = 4$ и $\gamma_2: v - u = 2$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{2u, u^2 - 4v, u^3 - 3uv\}.$$

Вариант № 7.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$e^{x-y} - \arcsin xyz + \frac{\pi}{6} \cos(x+z) - \sqrt{e} = 0$$

в точке $M_0\left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{(a + b \cos v)\cos u, (a + b \cos v)\sin u, b \sin v\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: u + v = 5$ и $\gamma_2: v - u = 1$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u, u^2 - 4v, u^3 - 5uv\}.$$

Вариант № 8.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$\ln x + y + xyz - \frac{\pi}{4} = 0$$

в точке $M_0(1, 1, 0)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{(u^2 + 2u + 1)\cos v, (u^2 + 2u + 1)\sin v, u^3\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: u - 3v = 1$ и $\gamma_2: u + 2v = 1$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{2u^2 - 2v^2, 4uv, 2u^2 + 2v^2\}.$$

Вариант № 9.

1. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$r = r(u, v) = \{2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3\}$$

в точке $M_0(3, 5, 7)$.

2. Найдите первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$r = r(u, v) = \{5 \operatorname{ch} u \cos v, 5 \operatorname{ch} u \sin v, 3 \operatorname{sh} u\}.$$

3. Найдите угол между кривыми $\gamma_1: 2u + v = 2$ и $\gamma_2: v - 3u = 1$ на поверхности

$$r = r(u, v) = \{u, u^2 - 2v, u^3 - 3uv\}.$$

7.1.5. Примерные вопросы к зачету по дисциплине

1. Способы задания плоской кривой. Касательная.
2. Пространственная кривая. Репер Френе.
3. Кривизна и кручение кривой. Натуральные уравнения.
4. Гладкая поверхность. Касательная плоскость и нормаль.
5. Первая квадратичная форма поверхности и её роль.
6. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна линии на поверхности.
7. Полная и средняя кривизны поверхности.
8. Девивационные формулы поверхности.
9. Символы Кристоффеля и их вычисление.
10. Гладкие многообразия. Примеры.
11. Касательное пространство гладкого многообразия.
12. Римановы многообразия. Примеры.
13. Тензоры на римановом многообразии и операции над ними.
14. Кососимметрические тензоры.
15. Геодезические связности на римановом многообразии.
16. Параллельный перенос векторных полей.
17. Тензор кривизны.
18. Дифференциальные формы.
19. Внешнее произведение и внешнее дифференцирование форм.
20. Интеграл дифференциальной формы.
21. Общая формула Стокса и её частные случаи (формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса).

7.1.6. Примерные задачи к зачету по дисциплине

1. Найти производную по t от вектор-функции $\bar{r}(t) = (t-1)\bar{i} + \frac{t^2+1}{2}\bar{j} - 3\bar{k}$ ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - линейно независимые, постоянные векторы)
2. Каково необходимое и достаточное условие, чтобы вектор-функция $\bar{r}(t)$ имела постоянное направление

3. Каково необходимое и достаточное условие, чтобы в некотором интервале $|\vec{r}(t)| = const$
4. Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой $x = t \sin t, y = t \cos t, z = t^t$ в начале координат:

$$\vec{r} = \frac{\vec{l}_2 + \vec{l}_3}{\sqrt{2}}, \quad \vec{\gamma} = \frac{2\vec{l}_1 - \vec{l}_2 + \vec{l}_3}{\sqrt{6}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{l}_1 + \vec{l}_2 - \vec{l}_3}{\sqrt{3}}$$
5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в точке М (1, 3, 4) поверхности $\left(6x + 3y - 2z - 7 = 0, \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}\right)$.
6. Найти главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$.
7. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = \cos^3 t, y = \sin^2 t, z = \cos 2t$ в ее произвольной точке $(4(x \cos z - y \sin t) - 3z = \cos 2t)$.
8. Составить уравнение касательной плоскости к тору $x = (1 + 5 \cos u) \cos v, y = (1 + 5 \cos u) \sin v, z = 5 \sin u$ в точке $M(u, v)$, для которой $\cos u = \frac{3}{5}, \cos v = \frac{4}{5}, 0 < u, v < \frac{\pi}{2}$, $(12x + 9y + 20z - 140 = 0)$.
9. Найти под каким углом пересекаются кривые $u + v = 0, u - v = 0$ на прямом геликоиде $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$.
10. На поверхности $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ дана точка $P(u, v = 1)$. Вычислить главные кривизны поверхности в точке P .

$$\left(k_n^1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}, k_n^2 = 0\right)$$

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 30баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

Основная

- 1) Мищенко, Александр Сергеевич. Курс дифференциальной геометрии и топологии : [для мех.-мат. спец. ун-тов] / Мищенко, Александр Сергеевич, А. Т. Фоменко. - М. : Факториал-пресс, 2000, 1980 (Изд-во МГУ). - 432 с. : ил. ; 22 см. - 1-30.
- 2) Погорелов, Алексей Васильевич. Дифференциальная геометрия : [учебник для студентов матем. спец. ун-тов и пед. ин-тов] / Погорелов, Алексей Васильевич. - Изд. 6-е, стереотип. - М. : Наука, 1974, 1969. - 176 с. ; 19 см. + с черт. - 0-28.
- 3) Сборник задач по дифференциальной геометрии: По спец. "математика" / под ред. А.С.Феденко; [И.В.Белько. В.И.Ведерников, В.Т.Воднеев и др.]. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1979. - 272 с. : ил. ; 21 см. - Предм. указ.: с.266-272. - 0-65.
- 4) Манфредо П. до Кармо Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей [Электронный ресурс]/ Манфредо П. до Кармо— Электрон. текстовые данные.— Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2013.— 608 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28887.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

Дополнительная

- 1) Дубровин, Борис Анатольевич. Современная геометрия : Методы и приложения. Т. 1 : Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей / Дубровин, Борис Анатольевич ; С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. - 5-е изд., испр. - М. : Эдиториал УРСС: Добросвет, 2001. - 334 с. - ISBN 5-8360-0160-X : 0-0.
- 2) Дубровин, Борис Анатольевич. Современная геометрия : Методы и приложения. Т. 2 : Геометрия и топология многообразий / Дубровин, Борис Анатольевич ; С.П.Новиков, А.Т.Фоменко . - 5-е изд., испр. - М. : Эдиториал УРСС: Добросвет, 2001. - 293 с. - ISBN 5-8360-0161-8 : 0-0.
- 3) Дубровин, Борис Анатольевич. Современная геометрия : Методы и приложения. Т. 3 : Теория гомологий / Дубровин, Борис Анатольевич ; С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. - Изд. 2-е, испр. - М. : Эдиториал УРСС: Добросвет, 2001. - 286 с. - ISBN 5-8360-0162-6 : 0-0.
- 4) Игнаточкина Л.А. Топология для бакалавров математики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Игнаточкина Л.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Прометей, 2016.— 88 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58207.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	Студентам:

			<p>- запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии;</p> <p>Преподавателям:</p> <p>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</p> <p>Всем заинтересованным пользователям:</p> <p>1. – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе.</p> <p>2. – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.</p>
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru , http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по дифференциальной геометрии распределена по темам и по часам на лекции, практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

Специфика дисциплины «Дифференциальная геометрия» состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

- 1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
- 2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
- 3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
- 4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
- 5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
- 6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

- а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
- б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
- в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

Методические рекомендации

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
2. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. М.: Высшая школа, 1980.
3. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Решать задачи и упражнения из задачников

1. *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т.* Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросы для самопроверки

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т.* Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по дифференциальной геометрии рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины дифференциальная геометрия. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.