



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
**Линейные уравнения в
банаховых пространствах**

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа
01.04.01 Математика

Профили подготовки:
Дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования:
магистратура

Форма обучения:
очная

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений: факультативная дисциплина.

Махачкала 2021

Рабочая программа дисциплины *линейные уравнения в банаховых пространствах* составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.01 Математика (уровень магистратуры) от 10.01.2018 №12.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,
Рагимханов В.Р., к. ф.-м. н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2021г.,
протокол № 6

Председатель  Бейбалаев В.Д.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением
« 09 » июля 2021г

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «*Линейные уравнения в банаховых пространствах*» является факультативной и входит в формируемую участниками образовательных отношений часть ОПОП магистратуры по направлению *01.04.01 Математика*.

Дисциплина реализуется на *факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с формированием и развитием у студентов профессиональных и специальных компетенций, позволяющих им на базе освоенных теоретических и практических основ теория линейных уравнений в банаховых пространствах осуществлять профессиональную деятельность.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
обще профессиональных – ОПК-1;
профессиональных – ПК-1; ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *коллоквиума, промежуточный контроль в форме зачета.*

Объем дисциплины 1 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации				
3	36	6					30	зачет

1. Цели освоения дисциплины

Магистрант, освоивший дисциплину «*Линейные уравнения в банаховых пространствах*» должен понимать роль и место дисциплины в структуре общего курса математического и функционального анализа, понимать основные идеи, лежащие в основе теории линейных операторов; должен обладать теоретическими знаниями и иметь четкое представление о методах построения теории линейных уравнений в банаховых пространствах; должен владеть приобрести навыки для постановки и решения новых задач, приводящих к решению линейных уравнений в банаховых пространствах.

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «*Линейные уравнения в банаховых пространствах*» является факультативной дисциплиной и входит в формируемую участниками образовательных отношений часть ОПОП магистратуры по направлению *01.04.01 Математика*.

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

Изучение данной дисциплины предполагает хорошее знание основных понятий и методов математического анализа, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), теории меры и интеграла, действительный и комплексных анализ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-1. способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями в области математики ОПК-1.2. Умеет использовать фундаментальные знания в области математики в профессиональной деятельности ОПК-1.3. Может осуществить выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Знает: важнейшие свойства линейных мер и основных видов интегралов, применяемых в современном анализе; постановку различных актуальных и значимых задач современного функционального анализа. Умеет: анализировать измеримость множеств и функций, существование интегралов, давать двусторонние оценки интегралов, применять их при решении задач фундаментальной и прикладной математики. Владеет: основными методами современного функционального анализа, в частности, анализа свойств метрических, линейно нормированных и гильбертовых пространств, а также различных операторов в этих пространствах	Конспектирование и проработка лекционного материала. Самостоятельная работа
ПК-1. способностью к интенсивной научно-исследовательской работе		Знает: теоретические основы базовых математических дисциплин современного анализа (вещественного анализа, комплексного анализа и функционального анализа), а также определения и важнейшие свойства основных видов интегралов,	Конспектирование и проработка лекционного материала. Самостоятельная работа

		<p>применяемых в современном анализе.</p> <p>Умеет: решать задачи, связанные с анализом и применением различных методов из области математических и физических наук; анализировать существование интегралов, давать двусторонние оценки интегралов, применять их в прикладных задачах.</p> <p>Владеет: базовыми методами современной математики по исследованию математических и естественнонаучных задач; методами функционального анализа</p>	
<p>ПК-2. способностью к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом</p>		<p>Знать: существо поставленной научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы перед коллективом; методы и приемы решения научно-исследовательской (научно-производственной) проблемы; основы педагогики и психологии; современные проблемы педагогики и психологии;</p> <p>Уметь: создать научный коллектив, способный справиться с поставленной задачей; строить деловые отношения с работниками; организовать научно-исследовательские и научно-производственные работы;</p> <p>Владеть: в полном объеме информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения.</p>	<p>Конспектирование и проработка лекционного материала. Самостоятельная работа</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 1, академических часов 36.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
Модуль 1. Линейные уравнения в банаховых пространствах								
1. Линейные уравнения. Основные понятия	3		1				5	
2. Уравнения с замкнутым оператором	3		1				5	
3. Нормально разрешимые уравнения	3		1				5	
4. Нормально разрешимые уравнения с конечномерным нуль-пространством	3		1				5	
5. Априорные оценки	3		1				5	
6. Фредгольмовы операторы. Индекс фредгольмова оператора	3		1				5	
Всего по модулю 1	3		6				30	зачет
ИТОГО за 3 семестр			6				30	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Второй курс, третий семестр

Модуль 1. Линейные уравнения в банаховых пространствах

Тема 1. Линейные уравнения. Основные понятия

Три основных принципа линейного функционального анализа (принцип открытости отображения, теорема Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности). Области значений, области определения, нормальной разрешимости, плотной разрешимости линейного уравнения в банаховом пространстве. Критерий конечномерности подпространства банахова пространства.

Тема 2. Уравнения с замкнутым оператором

Дается определение замкнутого оператора. Теорема Банаха: Если замкнутый оператор определен на всем банаховом пространстве, то он ограничен. Доказывается, что для уравнения с замкнутым оператором корректная разрешимость эквивалентна однозначной нормальной разрешимости. Вводится понятие обобщенного решения линейного уравнения. Уравнение с замкнутым оператором, имеющим плотную область определения. Доказано, что если оператор A замкнут, то из замкнутой разрешимости сопряженного уравнения следует нормальная разрешимость исходного уравнения. Доказывается, что если оператор A замкнут, то замкнутая разрешимость и нормальная разрешимость уравнения (A^*) эквивалентны. Доказывается, что для того, чтобы

уравнение (A) с замкнутым оператором было везде разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы сопряженное уравнение было корректно разрешимым

Тема 3. Нормально разрешимые уравнения

Уравнения с замкнутой областью значений. Ограниченные снизу линейные операторы. Модуль инъективности линейного оператора. Теорема Банаха о замкнутости области значений сопряженного оператора.

Тема 4. Нормально разрешимые уравнения с конечномерным нуль-пространством

Доказывается следующее утверждение: Для того, чтобы уравнения

$$Ax = y \quad (A)$$

с замкнутым оператором A было нормально разрешимо и соответствующее однородное уравнение $Ax = 0$ имело лишь конечное число линейно независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого компактного множества из $R(A)$ был локально компактным.

Если уравнение (A) n -нормально, то уравнение $Ax + Bx = y$, где B – любой вполне непрерывный оператор, также n -нормально.

Тема 5. Априорные оценки

Априорные оценки. Связь априорных оценок с некоторыми характеристиками соответствующего уравнения. Доказывается, что если E компактно вложено в E_0 , то для уравнения с замкнутым оператором A наличие априорной оценки является необходимым и достаточным условием его n -нормальности. Доказывается, что для того, чтобы уравнение (A) с замкнутым оператором, действующим в пространство F , было n -нормальным, достаточно, чтобы пространство E^0_A было компактно вложено в пространство E_0 .

Тема 6. Фредгольмовы операторы. Индекс фредгольмова оператора

Фредгольмовы операторы. Основные свойства и примеры фредгольмовых операторов. Индекс фредгольмова оператора. Гомотопическая инвариантность индекса. Устойчивость индекса фредгольмова оператора относительно возмущений.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для обеспечения самостоятельной работы магистров использовать учебные пособия

- 1) Крейн, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн – М.: Наука, 1971. – 104 с.
- 2) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.
- 3) Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.
- 4) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
- 5) Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для вузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN 5-9221-0271-0 : 151-01.

Задания для самостоятельной работы

1. Последовательности линейных операторов. Теорема Банаха – Штейнгауза.
2. Обратные операторы. Теоремы об обратимости операторов.
3. Теорема Хана – Банаха. Теоремы отделимости.
4. Теорема о вложении нормированного пространства во второе сопряженное.
5. Уравнение, сопряженное к факторизованному.
6. Уравнение с замкнутым оператором, имеющим плотную область определения.
7. Нормально разрешимые уравнения с конечномерным нуль-пространством.
8. Априорные оценки.
9. Уравнения с конечным дефектом.
10. Различные сопряженные уравнения.
11. Линейные преобразования уравнений.
12. Преобразование d-нормальных уравнений.
13. Фредгольмовы уравнения.
14. Индекс фредгольмовых уравнений.
15. Регуляризация фредгольмовых уравнений с нулевым индексом.
16. Линейная замена переменного.
17. Устойчивость свойств уравнений.
18. Переопределенные уравнения.
19. Неопределенные уравнения.
20. Интегральные уравнения Фредгольма.
21. Интегральные уравнения Вольтерра.
22. Интегральные уравнения, ядра которых содержат суммируемые особенности.
23. Уравнение Винера-Хопфа.
24. Сингулярные интегральные уравнения.
25. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.
26. Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений.
27. Краевая задача для уравнений векторного анализа.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Типовые контрольные задания

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Интегральные уравнения Фредгольма
2. Интегральные уравнения Вольтера.
3. Полные нормированные пространства, критерий полноты.
4. Определение и примеры линейных непрерывных операторов.
5. Непрерывность и ограниченность линейных операторов.
6. Норма линейного непрерывного оператора.
7. Полнота пространства линейных непрерывных операторов.
8. Распространение линейных операторов.
9. Последовательности линейных операторов. Теорема Банаха – Штейнгауза.
10. Обратные операторы. Теоремы об обратимости операторов.
11. Линейные функционалы.
12. Теорема Хана – Банаха. Теоремы отделимости.
13. Сопряженное пространство, примеры сопряженных пространств.
14. Теорема о вложении нормированного пространства во второе сопряженное.
15. Рефлексивные пространства.
16. Слабая сходимость в нормированном пространстве.
17. Слабая сходимость в сопряженном пространстве.
18. Замкнутые операторы.
19. Однозначно разрешимые уравнения.
20. Корректно разрешимые уравнения.
21. Нормально разрешимые уравнения.
22. Плотно разрешимые уравнения.
23. Фактор-пространства банахова пространства.
24. Факторизация линейного уравнения и его свойства.
25. Уравнения с замкнутым оператором.
26. Корректная разрешимость уравнения с замкнутым оператором.
27. Критерий нормальной разрешимости уравнения с замкнутым оператором.
28. Сопряженное уравнение.
29. Уравнение, сопряженное к факторизованному.
30. Уравнение с замкнутым оператором, имеющим плотную область определения.
31. Нормально разрешимые уравнения с конечномерным нуль-пространством.
32. Априорные оценки.
33. Уравнения с конечным дефектом.
34. Различные сопряженные уравнения.
35. Линейные преобразования уравнений.
36. Преобразование d -нормальных уравнений.
37. Фредгольмовы уравнения.
38. Индекс фредгольмовых уравнений.

7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

Основная

- 1) Крейн, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн – М.: Наука, 1971. – 104 с.
- 2) Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.
- 3) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
- 4) Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN 5-9221-0271-0 : 151-01.
- 5) Данилин А.Р. Функциональный анализ для магистрантов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Данилин А.Р.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 192 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66614.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

Дополнительная

- 6) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.
- 7) Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.

- 8) Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович, Леонид Витальевич. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1977. - 741 с. : ил. ; 22 см. - Список лит.: с.719-730. - Указ. предм.: и обозначений: с. 731-741. - 3-20.
- 9) Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 216 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66213.html>.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	<p>Студентам:</p> <ul style="list-style-type: none"> - запустить установленный у Вас математический пакет выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакет подходящий и решить свою задачу по аналогии; <p>Преподавателям:</p> <ul style="list-style-type: none"> - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. <p>Всем заинтересованным пользователям:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. 2. – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru , http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по дисциплине линейные уравнения в банаховых пространствах распределена по темам и по часам на лекции; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает

студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Методические рекомендации

Для успешного изучения дисциплины нужно изучить следующие литературные источники:

1. Крейн, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн – М.: Наука, 1971. – 104 с.
2. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.

Решить задач и упражнений из учебного пособия Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с. 369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.

Для проверки остаточных знаний использовать вопросы для самопроверки

Для подготовки к зачету: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по предмету рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины линейные уравнения в банаховых пространствах. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.