

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Методы Монте - Карло**

**Кафедра прикладной математики**

**Образовательная программа**

**01.04.02-Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) программы:

**Математическое моделирование и вычислительная математика**

Уровень высшего образования

магистратура

Форма обучения

**очная**

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую  
участниками образовательных отношений

Махачкала, 2021

Рабочая программа дисциплины «Методы Монте-Карло» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02–Прикладная математика и информатика.  
Приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 №13. *математика*

Разработчик: кафедра прикладной математики к.ф.-м.н. доцент Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры прикладной математики от «22» июня 2021г., протокол №10  
Зав. кафедрой *К* Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» июня 2021г., протокол №6.  
Председатель *В.Д.* Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «09» *07* 2021г.  
Начальник УМУ *А.Г.* Гасангаджиева А.Г.  
(подпись)

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина "Методы Монте-Карло" входит в часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики*.

Метод Монте – Карло появился в 40-х годах 20-го столетия в связи с необходимостью решения сложнейших многомерных задач ядерной физики, задач расчета ядерных реакторов и защиты от ядерного излучения в связи с созданием атомной бомбы, и первоначально использовался в задачах, имеющих вероятностную интерпретацию.

Дальнейшее развитие теории метода позволило резко расширить его возможности и сейчас метод Монте – Карло является эффективным (во многих случаях единственным) средством решения многих сложных задач математической физики, техники, экономики, экологии, теории массового обслуживания и других.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с моделированием случайных величин, изложением основ метода Монте – Карло и его использованием при решении различных прикладных задач. Курс "Методы Монте-Карло" состоит из трех составных частей: моделирования случайных величин с заданным законом распределения, построения вероятностных моделей реальных случайных систем, статистической теории оценивания. Статистические методы вычисления интегралов занимают центральное место курса. Немаловажное значение имеет задача получения последовательности реализаций случайных величин, процессов. Рассматриваются способы решения линейных алгебраических и линейных интегральных уравнений.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: *обще профессиональных – ОПК-2; профессиональных – ПК-1, ПК-4*.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: индивидуальный опрос, защита лабораторных работ, контрольная работа, коллоквиум и промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семестр	Учебные занятия		Форма промежуточной аттестации
	в том числе		
	Контактная работа обучающихся с препода-	СРС,	

	вателем						в том числе экзаменов	(зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	Все го	из них						
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации		
9	<b>72</b>	<b>14</b>	<b>16</b>				<b>42</b>	
Подготовка к экзамену	<b>36</b>						<b>36</b>	экзамен
Итого	<b>108</b>	<b>14</b>	<b>16</b>				<b>78</b>	

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Методы Монте-Карло» являются:

-овладение основами одного из современных универсальных численных методов моделирования сложных задач физики, техники, социологии, экономики и др.; освоение методов вычисления кратных интегралов, решения линейных уравнений, получение навыков применения методов Монте-Карло для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений, задач переноса излучений, теории массового обслуживания.

-творческое овладение программным материалом, методами *Монте-Карло* для их дальнейшего использования в имитационном моделировании при решении конкретных прикладных задач, математическим аппаратом обоснования методов статистического моделирования .

### 2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «Методы Монте-Карло» входит в часть образовательной программы, формируемую участниками образовательных отношений, по направлению 01.04.02 «прикладная математика и информатика», профиль подготовки - *математическое моделирование и вычислительная математика*. Для его изучения необходимы знания и навыки, полученные магистрантами при обучении по программе бакалавриата по дисциплинам: «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Теория случайных процессов» и «Методы статистического моделирования» и является, таким образом, логическим продолжением углубленного изучения вероятностных законов и их роли на практике.

В результате изучения курса обучающийся должен овладеть теоретическими основами и практическими навыками решения типовых задач моделирования случайных процессов, теории переноса излучений, решения инте-

гральных уравнений и больших систем алгебраических уравнений методом Монте-Карло.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

Код и наименование компетенции из ФГОС ВО	Код и наименование индикатора достижения компетенций.	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-2. Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач.	ОПК-2.1. Владеет навыками использования математического аппарата и системы программирования для решения прикладных задач.	<p>Знает: принципы построения математических моделей для решения прикладных задач методами статистических испытаний, методами Монте-Карло, использования при этом математического аппарата и системы программирования для решения прикладных задач</p> <p>Умеет: применять имеющиеся навыки использования математического аппарата и системы программирования для решения прикладных задач.</p> <p>Владеет: навыками использования математического аппарата и системы программирования для решения прикладных задач методами Монте-Карло.</p>	Устный опрос, письменный опрос;
	ОПК-2.2. Умеет решать различные прикладные задачи,	Знает: модифицированные математические модели для ре-	Письменный опрос

	<p>используя существующие математические методы и системы программирования.</p>	<p>шения различных прикладных задач в области статистического моделирования. Умет: решать различные прикладные задачи, используя существующие математические методы и системы программирования, методы статистического моделирования. Владеет.: существующими математическими методами и системами программирования, используемых при решении различных прикладных задач математики, механики.</p>	
	<p>ОПК-2.3. Имеет практический опыт исследований прикладных задач.</p>	<p>Знает: основы математической теории для составления математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности. Умеет :использовать необходимые сведения математической теории для составления математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности, опираясь на имеющийся практический опыт исследований прикладных задач.</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос;</p>

		Владеет: методикой составления математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности, дополненной практическим опытом исследований прикладных задач.	
ПК-1. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-1.1. Обладает умением сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<p>Знает: методы сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук.</p> <p>Умеет: осуществлять сбор и обработку данных, полученных в области математических и (или) естественных наук.</p> <p>Владеет: навыками и методикой, умением сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	Устный опрос, письменный опрос;
	ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-	Знает: формулировку и решение стандартных задач в собственной научно-исследовательской деятельности в мате-	Устный опрос, письменный опрос;

	<p>исследовательской деятельности в математике и информатике.</p>	<p>матике и информатике.  Умеет: применять решение стандартных задач в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.  Владеет: методами и научным опытом решения задач в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике.</p>	
	<p>ПК-1.3. Имеет практический опыт использования методов современных научных исследований</p>	<p>Знает: методы использования современных научных исследований при решении своих практических задач.  Умеет: использовать методы и способы осуществления современных научных исследований в области научных интересов.  Владеет: методами современных научных исследований в области физики и прикладной математики.</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос;</p>



<p>ПК-4. Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности.</p>	<p>ПК-4.1. Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции).</p>	<p>Знает: основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения программных продуктов и программных комплексов. Умеет: осуществлять проектирование и производство программных продуктов и программных комплексов, их сопровождение, администрирование и развитие.</p> <p>Владеет: навыками и методикой, умением проектирования и производства программного продукта, принципы построения программных продуктов и программных комплексов.</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос, защита лабораторных работ.</p>
	<p>ПК-4.2. Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта.</p>	<p>Знает: методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта.</p> <p>Умеет: использовать методы проектирования и производства</p>	<p>Устный опрос, письменный опрос;</p>

		<p>программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами при решении задач статистического моделирования методом Монте-Карло.</p>	
	<p>ПК-4.3. Имеет практический опыт применения указанных выше методов и технологий.</p>	<p>Владеет: методами проектирования и производства программного продукта при решении задач статистического моделирования методом Монте-Карло</p> <p>Знает: методы использования практического опыта применения принципов проектирования и производства программного продукта.</p> <p>Умеет: использовать практический опыт проектирования и производства программного продукта при решении задач различными модификациями метода Монте-Карло.</p> <p>Владеет: методами и средствами использования практического опыта проектирования и производства программного продукта при решении задач различными модифи-</p>	<p>Устный</p> <p>опрос, письменный опрос;</p>

		кациями метода Монте-Карло.	
--	--	-----------------------------	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практ.заня	Лаб. раб.	Контроль самост. раб.		
<b>Модуль 1. Моделирование случайных величин и процессов</b>									
1.	Основы метода Монте-Карло.	1		2				4	Устный опрос.
2.	Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло.	1		2		4		8	Устный опрос. Проверка лабораторных работ.
3.	Решение систем алгебраических уравнений и интегральных уравнений.	1		4		4		8	Устный опрос. Проверка лабораторных работ.
	<i>Итого по модулю 1:</i>			<b><u>8</u></b>		<b><u>8</u></b>		<b><u>20</u></b>	
<b>Модуль 2. Моделирование задач переноса излучений и систем массового обслуживания.</b>									
1.	Прямое моделирование процесса методом М-К. Расчет потока через плоскую среду.	1		2		4		8	Проверка лабораторных работ. Прием лабораторных работ.

2.	Весовые методы в задачах теории переноса излучений.	1		2		2		8	Проверка лабораторных работ. Прием лабораторных работ
.3.	Моделирование системы массового обслуживания.	1		2		2		6	Проверка лабораторных работ. Прием лабораторных работ.
	<i>Итого по модулю 2:</i>			<b>6</b>		<b>8</b>		<b>22</b>	
<b>Модуль 3. Промежуточная аттестация.</b>									
	<i>Экзамен</i>	1							<b>36</b>
	<b>ИТОГО по дисциплине:</b>	<b>108</b>		<b>14</b>		<b>16</b>		<b>42</b>	<b>36</b>

#### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

##### Лекции

##### Модуль 1. Основы метода Монте – Карло.

Тема 1. Основы метода Монте-Карло.

Общая схема метода Монте – Карло (М-К) для оценки неизвестного математического ожидания. Погрешность метода М-К, интервальные оценки при статистическом оценивании параметров распределений. Задачи метода Монте – Карло.

Тема 2. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло.

Вычисление интеграла, как площади. Вычисление интеграла, как среднего значения. Оценка погрешности, построение доверительного интервала. Вычисление многократных интегралов методом М-К

Тема 3. Решение систем алгебраических уравнений и интегральных уравнений. Решение систем алгебраических уравнений методом М-К.. Построение цепи Маркова для решения СЛАУ методом М-К. Решение интегральных уравнений методом М-К. Связь цепей Маркова с решением интегральных уравнений методом М-К.

##### **Модуль 2. Моделирование задач переноса излучений и систем массового обслуживания.**

Тема 4. Прямое моделирование процесса методом М-К. Расчет потока через плоскую среду.

Прямое моделирование случайного процесса методом М-К.. Случайный процесс прохождения излучения в среде. Расчет потока излучения через плоскую среду.

Тема5.Весовые методы в задачах теории переноса излучений.

Весовые методы. Функция ценности. Моделирование длины пробега без вылета. Моделирование без поглощения. Численное сравнение погрешностей с результатами прямого моделирования.

Тема 6. Моделирование системы массового обслуживания.

Системы массового обслуживания (СМО). Классификация систем. Показатели СМО. Моделирование потока заявок. Моделирование СМО методом Монте-Карло .

### **Лабораторные занятия**

#### **Модуль 1. Основы метода Монте – Карло.**

Тема 1. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло  
Оценка интегралов, как площади. Вычисление интегралов, как среднего значения подынтегральной функции. Оценка погрешности метода Монте-Карло.

Методы понижения дисперсии при оценке интегралов методов Монте-Карло: существенная выборка, выделение главной части.

Тема 2. Решение систем алгебраических уравнений и интегральных уравнений.  
Цепи Маркова. Моделирование цепей Маркова. Решение систем алгебраических уравнений методов Монте-Карло. Точные и итерационные методы.  
Численное сравнение решения конкретной СЛАУ методами Монте-Карло и простых итераций.

#### **Модуль 2. Моделирование задач переноса излучений и систем массового обслуживания.**

Тема 4. Прямое моделирование процесса методом М-К. Расчет потока через плоскую среду.

Процесс переноса излучений как Марковской цепи движения элементарных частиц. Общее описание процесса переноса. Расчет потока через плоскую пластину. Различные способы моделирования длины пробега частиц. Методы максимального сечения и минимальных длин.

Тема5.Весовые методы в задачах теории переноса излучений.

Весовые методы. Функция ценности. Моделирование длины пробега без вылета. Моделирование без поглощения. Численное сравнение погрешностей с результатами прямого моделирования.

Тема 6. Моделирование системы массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО). Классификация систем. Показатели СМО. Моделирование потока заявок. Моделирование СМО методом Монте-Карло .

## **5.Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины «*Методы Монте-Карло*» лежит лекционно-лабораторная система обучения. Большая часть занятий предусмотрено провести в форме лабораторных занятий, что непосредственно связано со спецификой дисциплины. Учеба в магистратуре сама по себе предполагает большую самостоятельность и индивидуальность. Одновременно цели и задачи данной дисциплины, требования к программе курса предполагают самостоятельную работу магистрантов над процессом статистического моделирования случайных систем. Здесь уместно обратить внимание магистрантов на возможности имитационного моделирования. Теоретический материал по дисциплине и полученный опыт моделирования случайных систем используется при изучении других курсов, приложении к решению прикладных задач естествознания. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах факультета, а также в лаборатории "Математическое моделирование" кафедры Прикладной математики. Используются также интернет ресурсы и пакеты прикладных программ СТАТИСТИКА, MathCADиMatlab.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Ряд учебных и учебно-методических изданий, которые могут быть использованы при самостоятельной работе студентов приведены в разделах 8 и 9 настоящей Программы.

Подробное описание содержания и требований к выполнению лабораторных заданий, в частности, тем для домашнего выполнения содержатся в разделе 7.2.5 настоящей Программы.

Кроме этого при выполнении самостоятельной работы рекомендуются:

1.Назаралиев М.А., Гаджиева Т.В., Фаталиев Н.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 1: Теория вероятностей: учебное пособие. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2014. – 192 с.; Часть II. Математическая статистика. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2015. – 155 с.

2. Назаралиев М.А., Магомедов И.И. Лабораторные задания по математической статистике: методическое пособие. Махачкала: Изд. ДГУ, 2013. – 32 с.

### ***6.1 Задачи и примеры для самостоятельного решения.***

1. Найти моделирующую формулу для случайной величины с плотностью распределения  $f(x) = c(1+x)$ ,  $0 < x \leq 1$ .
2. Написать алгоритм моделирования 5 значений случайной величины  $\xi$  - числа очков при бросании игральной кости.
3. Написать алгоритм моделирования 4 значений случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda = 2$ .
4. Получить моделирующую формулу стандартного метода для случайной величины  $\xi$  с плотностью распределения  $f(x) = ce^{-3/2x}$ ,  $0 \leq x < \infty$ .
5. Получить формулу моделирования стандартного для случайной величины с плотностью распределения  $f(x) = ce^{-5x}$ ,  $0 \leq x \leq l$ .
6. Написать формулу моделирования для случайной величины с плотностью распределения  $f(x) = c|\sin x|$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
7. Написать алгоритм метода исключения для случайной величины с плотностью распределения  $f(x) = cx^{5/3}e^{-x}$ ,  $0 < x$ .
8. Написать формулу моделирования для случайной величины с плотностью распределения  $f(x) = c/(1+2x)^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
9. Методом суперпозиции найти моделирующие формулы для случайной величины с плотностью распределения  $f(x) = 1 - \frac{1}{3}(2e^{-2x} + e^{-3x})$ ,  $0 < x < \infty$ .
10. Двумерная дискретная случайная величина задана законом распределения

$\tau$	$\xi$		
	$x_1 = 0,1$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,7$
1	0,2	0,3	0,1
2	0,16	0,18	0,06

Найти условные законы распределения  $P(\tau_j / x_i)$ . Написать алгоритм моделирования значений двумерного вектора  $(\xi, \tau)$ .

11 Получить формулы моделирования двумерного случайного вектора  $(\xi, \tau)$  с плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = c\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

12.Найти формулы моделирования двумерного случайного вектора с плотностью распределения  $f(x, y) = cx \cdot y^2$ , в области, ограниченной прямыми:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 2.$$

13.Получить формулы моделирования двумерной случайной величины  $(\xi, \tau)$  с плотностью распределения  $f(x, y) = cy$  в области ограниченной прямыми

$$y = 0, \quad y = x, \quad x = 1.$$

14. Написать алгоритм и программу получения псевдослучайных чисел методом серединных квадратов Неймана. Получить 10 значений таких псевдослучайных чисел.

15.Вычислить методом Монте – Карло интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

а) как площади; б)используя в качестве плотности распределения  $f(x)$  -

плотность равномерного распределения в интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$ ; в) при  $f(x) = cx$

(сначала определить постоянную  $c$ ).

16.Оценка интеграла из примера (15) при условии пункта б) имеет вид

$$I^* = \pi/2 \cdot \sum_{i=1}^n \sin \xi_i / n, \quad \text{где } \xi_i - \text{случайные числа, равномерно распределенные в}$$

интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Найти минимальное число испытаний, при котором верхняя

граница ошибки  $\delta = 0,05$ .

17. Вычислить методом Монте – Карло определенный интеграл



$$I = \int_0^2 e^x dx$$

беря в качестве вспомогательной плотность распределения  $f(x) = c(1+x)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ . Сначала определить постоянную  $c$ .

18. Написать алгоритм вычисления методом Монте – Карло площади круга, вписанного в квадрат с вершинами  $(-1,-1)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,-1)$ .

19. Определить приближенное значение числа  $\pi$  с помощью алгоритма задачи (18). Найти такие приближения при различных значениях числа испытаний  $n = 100; 10^4; 10^5; 10^6$ .

20. В классической задаче Бюффона на геометрические вероятности на разграфленную параллельными линиями поверхность бросается игла длины  $l < L$ , где  $L$  - расстояние между параллельными линиями. Методом Монте – Карло оценить вероятность пересечения иглой какой-либо параллельной линии. Сравнить с точным решением при различных значениях числа испытаний  $n$ .

21. Имеется отрезок длины  $L$ , на которую случайно ставятся две точки  $x$  и  $y$ . Оценить методом Монте – Карло вероятность построения треугольника из полученных 3-х отрезков. Сравнить с точным решением при различных значениях числа испытаний  $n$ .

22. Игра в спортлото. Для участия в этой игре нужно было выбрать (вычеркнуть) 6 номеров из 49 (различных спортивных соревнований). Написать алгоритм случайного выбора (вычеркивания) 6 видов спорта из 49, перенумерованных от 1 до 49.

23. Задача Гюйгенса (Классическая задача теории вероятностей о «разорении игрока»): два игрока  $A$  и  $B$  продолжают некоторую игру до полного разорения одного из них. Оценить методом Монте – Карло вероятности разорения для каждого игрока, если: 1) начальные капиталы у них соответственно

равны  $a$  и  $b$  рублям, 2) вероятности выигрыша в каждой партии равны соответственно  $p$  и  $q$ ; 3) выигрыши в каждой партии составляет 1 руб. для одного (для другого, очевидно, проигрыш в 1 руб.).

Значения  $a, b, p, q$  выбрать разные. (Например  $a=100, b=200, p=0,6; q=0,4$ ).

## 6.2. Распределение тем рефератов по модулям и разделам

<b>Модуль 1. Основные задачи метода Монте – Карло.</b>		
1.1.	Основы метода Монте-Карло.	<u>Реферат:</u> История развития метода Монте-Карло.
1.2.	Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло.	<u>Реферат:</u> Сведение задачи вычисления интеграла к оценке математического ожидания некоторой случайной величины.
1.3.	Решение СЛАУ и интегральных уравнений методом Монте-Карло.	<u>Реферат:</u> Центральная предельная теорема теории вероятностей – основа метода Монте-Карло.
<b>Модуль 2. Моделирование задач переноса излучений и систем массового обслуживания.</b>		
2.1.	Прямое моделирование процесса методом М-К. Расчет потока через плоскую среду.	<u>Реферат:</u> Моделирование непрерывных случайных величин. Моделирование свободного пробега частиц.
2.2.	Весовые методы в теории переноса моделирования непрерывных случайных величин.	<u>Реферат:</u> О точности метода Монте-Карло. Способы уменьшения дисперсии при вычислении определенного интеграла.
2.3.	Моделирование системы массового обслуживания.	<u>Реферат:</u> Типы систем массового обслуживания. Моделирование потока заявок. Простой поток заявок.

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

### 7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

## 7.2. Типовые задания для контроля знаний

### 7.2.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиумам.

1. Виды случайных величин. Какие случайные величины называются дискретными? Какие случайные величины называются непрерывными?
2. Основные дискретные случайные величины: Бернулли, биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассоновское распределения. Где применяются?
3. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретных случайных величин из п.2.
4. Непрерывные случайные величины. Основные распределения: равномерное в интервале  $(a,b)$ , равномерное в  $(0,1)$ ; показательное, нормальное распределения. Применения. Функция распределения и плотность распределения.
5. Числовые характеристики:  $M\xi$  и  $D\xi$ , моменты, коэффициенты корреляции.
6. Многомерные случайные величины. Независимость случайных величин.
7. Законы больших чисел.
8. Центральная предельная теорема теории вероятностей.
9. История возникновения метода Монте-Карло.
10. Общая схема метода статистических испытаний метода Монте-Карло.
11. Задача моделирования случайных величин. Роль равномерной в  $(0,1)$  случайной величины.
12. Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины.
13. Специальные методы моделирования дискретно-равномерного и геометрического распределений.
14. Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины.
15. Алгоритм моделирования кусочно-постоянной и кусочно-линейной плотностей.
16. Метод исключения моделирования СВ.

17. Метод рандомизации моделирования.
18. Моделирование плотности  $f(x) = 3 \cdot (1 + x^2)/8$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .
19. Моделирование гамма и бета-распределений методом исключения.
20. Приближенное моделирование нормального распределения.
21. Моделирование нормального распределения.
22. Моделирование показательного распределения.
23. Моделирование изотропного вектора на плоскости.
24. Моделирование изотропного вектора в пространстве.
25. Методы получения псевдослучайных чисел.
26. Задача статистического оценивания неизвестных параметров распределения. Точечные и интервальные оценки.
27. Свойства оценок.
28. Погрешность метода статистических испытаний.
29. Задача оптимизации алгоритмов метода М-К.
30. Общие принципы построения алгоритмов и программ решения различных задач методом М-К.

### **7.2.2. Перечень вопросов к экзамену по дисциплине**

1. Вычисление определенного интеграла методом М-К, как площади.
2. Вычисление определенного интеграла методом М-К, как среднего значения подынтегральной функции.
3. Методы понижения дисперсии оценок интеграла. Алгоритм с нулевой дисперсией.
4. Метод существенной выборки.
5. Метод выделения главной части.
6. Сравнение дисперсий оценок при вычислении простого интеграла и при выборе в качестве вспомогательной плотности распределения плотности равномерной в  $(0,1)$  случайной величины.
7. Интегральное уравнение II – рода.
8. Интегральное уравнение переноса излучений .

9. Оценка функционалов от решения интегрального уравнения методом Монте-Карло (М-К).
10. Дисперсия оценки функционалов.
11. Метод зависимых испытаний.
12. Моделирование по «ценности».
13. Рандомизация оценок метода М-К.
14. Метод Монте-Карло и задачи переноса излучений. История.
15. Оптические параметры среды (коэффициенты рассеяния и поглощения, индикатриса рассеяния).
16. Уравнение переноса.
17. Процесс переноса излучения – как цепь Маркова. Распределения вероятностей для элементов траекторий. Плотность столкновений; поток фотонов.
18. Описание моделирования процесса переноса методом Монте-Карло
19. Моделирование элементов траекторий частиц.
20. Пример: перенос излучения через плоскую среду.
21. Методы максимального сечения и минимальных длин для моделирования длины пробега.
22. Интегральное уравнение переноса. Сопряженное уравнение переноса.
23. Локальные оценки.
24. Весовые методы. Модификации моделирования длины пробега.
25. Моделирование сопряженных траекторий. Основные оценки. Преимущества и недостатки.
26. Применение метода М-К для оценки качества и надежности системы.
27. Описание простейшей системы массового обслуживания. Виды СМО.
28. Поток Пуассона. Моделирование моментов поступления заявок.
29. Моделирование СМО методом М-К.
30. Моделирование СМО с отказами и очередями.

### 7.2.3. Темы рефератов

1. История возникновения метода Монте-Карло.
2. Первые работы по методу Монте-Карло, опубликованные в США и СССР.
3. Основные проблемы метода Монте-Карло. О точности метода.
4. Закон больших чисел и центральная предельная теорема – основы метода Монте-Карло.
5. Сведения задачи вычисления определенного интеграла к оценке математического ожидания некоторой случайной величины.
6. Приближенное моделирование нормальности  $N(0,1)$  распределения.
7. Вычисление площадей фигур методом Монте-Карло. Моделирование классической задачи теории вероятностей – «задачи о встрече».
8. Приближенное вычисление числа  $\pi$  методом Монте-Карло.
9. Моделирование классической задачи Банаха «О спичечных коробках».
10. Задачи теории систем массового обслуживания (СМО). Моделирование простой СМС методом Монте-Карло.

### 7.2.4. Лабораторные занятия

#### Лабораторная работа №1

**Тема: Моделирование случайных величин.**

*Теоретическая часть.*

- 1) Основные дискретные распределения: биномиальное распределение, геометрическое распределение, распределение Пуассона, гипергеометрическое распределение. Дать определения, написать выражения для функции распределения, привести числовые характеристики и характеристические функции.
- 2) Равномерное распределение в  $(0,1)$  и его роль при моделировании других случайных величин.
- 3) Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины.

- 4) Специальные методы моделирования для перечисленных выше распределений.
- 5) Статистические характеристики выборки  $\bar{X}$ ,  $S^2$ , эмпирическая функция распределения.
- 6) Построение гистограммы распределения по выборочным данным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
- 7) Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины.

**Задание 1:**

1) Написать алгоритм, блок-схему и программу стандартного метода для моделирования случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda = 2$ .

2) Написать алгоритм, блок-схему и программу специального метода с использованием рекуррентной формулы для вычисления  $P_{k+1}$  при условиях п.1).

3) Получить  $n$  значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  по алгоритму п.2). Вычислить  $\bar{X}$ ,  $S^2$  и сравнить их с точными значениями  $M\xi$  и  $D\xi$  распределения Пуассона.

4) Построить эмпирическую функцию  $F_n(x)$  распределения и сравнить с функцией распределения Пуассона.

**Задание 2:**

1) Написать алгоритм, блок-схему и программу стандартного метода моделирования биномиального распределения с вероятностью  $p=0,4$  появления события в каждом испытании и с вычислением  $P_{k+1}$  по рекуррентным формулам.

2) Вычислить  $\bar{X}$ ,  $S^2$  и сравнить их с точными значениями  $M\xi$  и  $D\xi$  при разных  $n$ .

3) Построить эмпирическую функцию  $F_n(x)$  распределения при разных значениях  $n$ .

- 4) Проверить статистически сходимость биномиального распределения к нормальному при увеличении  $n$ .
- 5) **Замечания:** Индивидуальность заданий обеспечивается тем, что в задании 1 предлагаются разные распределения варьированием параметра  $\lambda$  и др; в задании 2 – различными значениями параметров  $p$  и  $n$ .

## **Лабораторная работа №2**

### **Тема: Вычисление определенных интегралов методом**

#### **Монте – Карло.**

##### *Теоретическая часть:*

1. Приближенное вычисление определенных интегралов. Методы прямоугольников (левых, правых), трапеций, Симпсона, Гаусса, Ньютона – Котесса.
2. Моделирование случайных векторов, равномерно распределенных в некоторых областях.
3. Оценка определенных интегралов методом Монте – Карло, как площади.
4. Оптимизация методов оценки интегралов методом М-К:
  - а) выборка по важности (существенная выборка).
  - б) выделение главной части.
  - в) метод аналитического осреднения.

##### Задание:

1. Вычислить определенный интеграл  $I = \int_G \varphi(x) dx$  методами Монте – Карло и методами Симпсона (Трапеций, Гаусса др.). Сравнить результаты метода М-К при различных значениях количества реализаций  $n$  с более точными численными методами. В методе М-К в качестве вспомогательной плотности выбрать равномерное в  $(a, b)$  плотность. Оценить погрешности методов интегрирования и сравнить точность полученных результатов.



2. Вычислить заданный интеграл  $I$ :

- а) как площади (или объема);
- б) используя метод выделения главной части;
- с) используя метод существенной выборки.

3. Сравнить дисперсии оценок а), в), с) при разных значениях числа реализаций  $n$ .

4. Вычислить интеграл вида

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \varphi(x, y, z) dx dy dz \text{ методом М-К}$$

Метод вычисления – по выбору студента.

Пример: Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G (x \cdot y + y) dx dy dz, \text{ где область } G \text{ ограничена прямыми}$$

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 3.$$

**Замечание:** Индивидуальность лабораторных работ обеспечивается заданием как различных подынтегральных функций, областей интегрирования, так и сочетанием различных методов интегрирования (например метод Симпсона и метод Монте – Карло, метод трапеций и метод Монте – Карло и т.д.).

### Лабораторная работа №3

**Тема: Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Монте – Карло.**

*Теоретическая часть:*

1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Прямые методы решения СЛАУ.
3. Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости.
4. Интегральные уравнения и системы уравнений.
5. Оценка линейных функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода.

6. Метод М-К для решения СЛАУ  $A\bar{x} = \bar{f}$ .
7. Приведение к виду  $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{f}$ .
8. Матрица вероятностей переходов цепи Маркова.

**Задание:**

- 1) Решить систему  $A\bar{x} = \bar{f}$  методами Монте – Карло и простой итерации. Исследовать вопросы применимости метода простой итерации. Сравнить решения, полученные разными методами.
- 2) Найти методом М-К какие-то определенные компоненты вектора решения, например  $x_2$  и  $x_n$ .
- 3) Найти решения при разных значениях  $n$  – реализаций случайного процесса. Сравнить эти результаты.

*Замечание:* Индивидуальность заданий обеспечивается размерностью или коэффициентами матриц рассматриваемых систем уравнений.

**Пример:** Матрицу системы  $A\bar{x} = \bar{f}$ . Получить на ЭВМ следующим формулам:

$$a_{ij} = \frac{1}{k+j}, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad \text{при } k \leq 10$$

$$i, j = 1, \dots, k+1, \quad \text{при } k > 10,$$

где  $k$ - номер студента в списке группового журнала;

$$a_{ij} = 0, \quad i = 2, \dots, n; \quad j = i - 1$$

$$i = 1, \dots, n - 1; \quad j = i + 1.$$

### Лабораторная работа №4

**Тема:** Решение задач переноса излучения методом Монте – Карло (прямое моделирование и весовые модификации).

*Теоретическая часть:*

1. Моделирование показательного закона

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

2. Моделирование случайной величины с плотностью

$$f(x) = c \cdot \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

3. Моделирование плотностей, заданных кусочно-постоянно и кусочно-линейно.
4. Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины.
5. Метод исключения для моделирования непрерывной случайной величины. Моделирование изотропного вектора.
6. Оптические параметры среды, необходимые для описания процесса переноса.
7. Характеристики процесса переноса.
8. Общая схема моделирования процесса переноса методом Монте – Карло , как цепи Маркова.

**Задание 1:** Пусть на плоскую поверхность пластины толщины  $H$  падает параллельный поток излучения под углом  $\theta_0$  с осью  $oz$ . Среда однородная с коэффициентами рассеяния и поглощения  $\sigma_\eta$  и  $\sigma_c$ .

После рассеяния в некоторой точке  $z$  частица продолжает движение в направлении, определяемом плотностью  $f(\mu) = 1/2$ , где  $\mu$  – косинус угла с осью  $oz$ , т.е имеет место изотропное рассеяние.

Необходимо в результате моделирования задачи найти:

- 1) Вероятность  $P_b$  вылета частицы через поверхность  $z=0$ ;
- 2) Вероятность отражения (вылета через верхнюю границу пластины  $z=H$ )  $P_o$ .
- 3) Вероятность поглощения частицы средой  $P_n$ .

**Задание 2:** Ввести в задачу задания 1 отражение от поверхности  $z=0$ : при пересечении частицей поверхности  $z=0$  она забывает свою «историю» и отражается от поверхности с вероятностью  $P_a$  а с вероятностью  $1 - P_a$  поглощается поверхностью. Новое направление в случае отражения определяется законом  $f(\mu) = 2\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ . Вычислить указанные в задании величины ( $P_b$  – в этом случае будет – вероятность прихода на поверхность  $z=0$ ).

**Задание 3:** Использовать весовые методы моделирования длины пробега «без вылета» и моделирование траекторий «без поглощения» по отдельности и в сочетании.

Сравнить дисперсии разных способов расчета величин  $P_b$ ,  $P_o$  и  $P_n$ .

*Замечание:* индивидуальность заданий обеспечивается варьированием геометрических и оптических параметров среды  $H, \sigma_\eta, \sigma_c$ .

## Лабораторная работа №5

### Тема: Система массового обслуживания.

#### *Теоретическая часть:*

1. Дать определение системы массового обслуживания (СМО).
2. Виды СМО: одноканальные; многоканальные; с отказами без очередей; с отказами и с очередями и т.д.
3. Параметры, необходимые для расчета СМО.
4. Поток заявок. Простейший поток. Интенсивность поступления заявок. Распределения. Моделирование распределения Пуассона методом Монте – Карло.
5. Время выполнения заявки: постоянное; случайное. Интенсивность обслуживания заявок. Распределения. Показательное распределение вероятностей.
6. Характеристики, определяющие качество (эффективность) работы СМО: вероятность отказа  $P_{от}$ , среднее число занятых каналов  $N_z$ ; среднее число свободных каналов  $N_c$ ; вероятность обслуживания заявки  $P_{об}$  и др.

7. Общая схема моделирования СМО методом Монте – Карло (М-К). Оценка основных характеристик качества СМО методом М-К.

**Задания:**

1. Имеется СМО с 5 каналами обслуживания, работающих независимо друг от друга. Поток поступающих заявок пуассоновский. Время обслуживания очередной заявки распределено по показательному закону с  $\lambda = 2$ . Интенсивность поступления заявок равна 3. В начальный момент времени все каналы свободны. Заявка поступает на обслуживание в 1 канал. Если какой – то канал занят, то заявка поступает в следующий канал; если все каналы заняты, то система дает отказ.

Необходимо в результате моделирования системы в течении времени  $T=30$  мин определить:

- 1) Среднее число обслуженных заявок.
  - 2) Среднее число обслуживания одной заявки.
  - 3) Вероятность того, что заявка будет выполнена (обслужена).
  - 4) Вероятность отказа.
  - 5) Среднее число занятых каналов.
  - 6) Среднее число свободных каналов.
2. Привести эти результаты для разного числа испытаний  $n=10; 20; 30$ . (Одно испытание – это моделирование системы в течении 30 мин.).
3. Провести моделирование системы *n.1.* в случае наличия очереди. Длина очереди равна 5.

Необходимо кроме указанных выше параметров рассчитать также:

- 7) Среднюю величину очереди.
- 8) Среднее время ожидания в очереди

**7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат оценки работы магистранта за семестр выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 10 баллов,
- выполнение лабораторных заданий -40баллов,
- коллоквиум -40

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

—устный опрос- 100 баллов.

Здесь приведены верхние пределы баллов по каждому из пунктов. Максимальное количество баллов, которые может получить магистрант за текущий контроль - 100 б.

Промежуточный контроль знаний и навыков магистранта по предмету «Метод Монте-Карло», проверка овладения им приведенных выше компетенций проводится на экзамене.

Магистрант допускается к экзамену при выполнении и защите им (успешной сдачи) всех лабораторных работ.

Итоговая оценка магистранта по дисциплине определяется в соответствии со шкалой баллов, принятой в ДГУ, и состоит из 50% баллов, полученных по текущему контролю, плюс 50% баллов, полученных на экзамене.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

а) *основная литература:*

1. Ермаков ,Сергей Михайлович. Статистическое моделирование : Учеб. пособие для студ. по спец.: "Прикладная. математика" / Ермаков, Сергей Михайлович, Михайлов ,Геннадий Алексеевич Изд. 2-е, доп. - М. : Наука, 1982. - 296с. - 0-90.Местонахождение:                    Научная                    библиотека                    ДГУ

2. Назаралиев М.А. Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. Новосибирск, Наука, 1991 г.

3. Михайлов Г.А., ВойтишекА.В.. Численное статистическое моделирование. Методы Монте – Карло. М.: Академия, 2006, 368 с.

4. Ермаков С.М.. Метод Монте – Карло в вычислительной математике. Вводный курс. Издательство: Невский Диалект, Бином, Лаборатория знаний, 192 с., 2009 г.

5. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник / Г.П. Климов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 с. — 978-5-211-05846-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13115.html> (16.06.2018)

6. Ермаков, Сергей Михайлович. Метод Моне-Карло и смежные вопросы / Ермаков, Михайлович ; С.М.Ермаков.- М. : Наука, 1975. - 471с. - 1-81. Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

б) *дополнительная:*

1. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. «Метод Монте - Карло в атмосферной оптике». Новосибирск, Наука, 1976.

2. Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте - Карло. М., Наука, 1987.

3. Прохоров Ю.В. Лекции по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс] : учебник / Ю.В. Прохоров, Л.С. Пономаренко. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2012. — 254 с. — 978-5-211-06234-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13173.html> (16.06.2018)

4. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либрокком, 2009 г.

5. Ширяев А.Н. Вероятность. Т.1,2.-М.: МЦНМО, 2004 г.

6. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло .СП(б):. Изд. Лань, 2012.

***Средства обеспечения освоения дисциплины: программное обеспечение и интернет ресурсы.***

1. Программное обеспечение РТС MatCAD 15 F000Russian + Самоучитель (<http://ewgk.com/soft/41668-matcad-15-f000-russian-samouchitee.htm>).

2. Программное обеспечение MatLABR2011 b (<http://www.softforfree.com/programs/matlab-26810.html>).

3. Мухин О.И. Моделирование систем. Учебник. (stratum/as/ru/textdjjks/modelir/contents/html).

## **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

1. Федеральный портал <http://edu.ru>
2. Электронные каталоги научной библиотеки ДГУ <http://elib.dgu.ru> ; <http://edu.icc.dgu.ru>
3. Электронные версии учебников по математике <http://www.padabum.com/index.php?id=26938istart==so>

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Учебная программа по дисциплине «*Методы Монте-Карло*» распределена по темам и по часам на лекции и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к докладам и рефератам, а также из подготовки к лабораторным работам, коллоквиумам и сдаче зачета. При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий к решению прикладных задач. Решение достаточного количества задач по данной теме, аккуратное выполнение лабораторных работ поможет творческому овладению методами моделирования случайных систем, весьма эффективных при решении различных задач теории и практики.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель лабораторных занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению различных прикладных задач, где возникает необходимость разыгрывания случайных систем, привлечения различных модификаций метода Монте-Карло..



## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по данной дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины *методы Монте-Карло*. Кроме того, на факультете имеются 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

Учебные аудитории факультета подготовлены к проведению лекционных и семинарских занятий, оснащены современной презентационной техникой. Компьютерные классы факультета и ИВЦ ДГУ, лаборатория «Математическое моделирование» при кафедре прикладной математики укомплектованы современным оборудованием..