МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Теория случайных процессов

Кафедра *прикладной математики*
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

01.03.02-Прикладная математика и

информатика

Направленность (профиль) программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Уровень высшего образования
бакалавриат

Форма обучения
очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала, 2021

Рабочая программа дисциплины составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриат) от 10.01.2018 г., № 9

Разработчик: кафедра прикладной математики, Кадиев Р.И. д.ф.-м.н. профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры прикладной математики от «22» июня 2021 г., протокол № 10
Зав. кафедрой ________________ Кадиев Р.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» июня 2021 г., протокол №6.

Председатель ________________ Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «09» 07 2021 г.

Начальник УМУ ________________ Гасангаджиева А.Г.

(подпись)

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *теории случайных процессов* входит в в обязательную часть ОПОП образовательной программы *бакалавриата* по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с изучением и освоением следующего материала: случайные процессы и их вероятностные характеристики; классификация случайных процессов; преобразование случайных процессов; дифференцирование и интегрирование случайных процессов; стационарность и эргодичность процессов; спектральное представление случайных процессов; Гауссовы процессы, основные сведения, цепи Маркова, марковские процессы с непрерывным временем; пуассоновские процессы с переменной интенсивностью, сложные пуассоновские процессы; случайные функции с ортогональным и независимыми приращениями.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: универсиональных - УК-1, общепрофессиональных – ОПК-3 и профессиональных – ПК-4.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные занятия, практические занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости :*контрольная работа, коллоквиум* ,ипромежуточный контроль в форме *экзамена.*

Объем дисциплины *4*зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

<table>
<tr><th rowspan="4">Семестр</th><th colspan="7">Учебные занятия</th><th rowspan="4">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен</th></tr>
<tr><th colspan="7">в том числе</th></tr>
<tr><th colspan="6">Контактная работа обучающихся с преподавателем</th><th rowspan="2">СРС, в том числе экзамен</th></tr>
<tr><th>Всего</th><th>Лекции</th><th>Лабораторные занятия</th><th>Практические занятия</th><th>КСР</th><th>консультации</th></tr>
<tr><td>7</td><td>144</td><td>14</td><td>14</td><td>24</td><td></td><td></td><td>92</td><td>экзамен</td></tr>
<tr><td>Итого</td><td>144</td><td>14</td><td>14</td><td>24</td><td></td><td></td><td>72</td><td></td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины.

Целями освоения дисциплины *теория случайных процессов* является:

- овладение основными понятиями, методами *теории случайных процессов*; случайные процессы и их вероятностные характеристики, преобразование случайных процессов, основные понятия корреляционной теории; стационарность, эргодичность, спектральное разложение процессов; гауссовские процессы, их свойства; марковские случайные процессы; пуассоновские случайные процессы.

- творческое овладение основными методами и технологиями обоснования теории и решения задач *теории случайных процессов*; приложения теоретического материала к решению прикладных задач математики, естествознания.
- овладение основными стохастическими методами *теории случайных процессов* для создания базы последующим смежным курсам, в частности, для курсов, предусмотренных к освоению в магистратуре.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата.

Дисциплина теория случайных процессов входит в обязательную часть образовательной программы бакалавриата по направлению подготовки 01.03.02. прикладная математика и информатика. Знания по *теории случайных процессов* необходимы для данной специальности как для освоения различных смежных дисциплин, так и крайне нужны для создания математических моделей *стохастических процессов*, для последующего их решения, выбора из полученных решений тех решений, которые имеют прикладной смысл.

Изучение *теории случайных процессов* предполагает хорошее знание *теории вероятностей, математической статистики, элементов функционального анализа, линейной алгебры, интеграла Стильтьеса, теории меры.*

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

Код и наименование компетенции из ОПОП	**Код и наименование индикатора достижения компетенций** *(в соответствии с ОПОП)*	**Планируемые результаты обучения**	**Процедура освоения**
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации. применять системный подход для решения поставленных задач.	**УК-1.1.** Знает принципы сбора, обработки и обобщения информации.	**Знает:** структуру задач в различных областей. **Умеет:** анализировать постановку данной математической задачи. **Владеет:** навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в различных областей математики.	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен
	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности. деятельности.	**Знает:** принципы математического моделирования разнородных явлений. , **Умеет:** системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. **Владеет:** навыками систематизации разнородных явлений.	

	УК-1.3. Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска. создания научных текстов.	**Знает:** современные методы сбора и анализа научного материала. **Умеет:** применять современные методы и средства анализа и систематизации научных данных. **Владеет:** навыками и пользования информационных технологий в организации и проведении научного исследования.	
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**ОПК-3.1.** Знает принципы построения математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности.	**Знает:** принципы построения математических моделей. **Умеет:** построить математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности. **Владеет:** навыками построения математических моделей.	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен
	ОПК-3.2. Умеет применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.	**Знает:** применять и модифицировать математические модели для решения различных задач. **Умеет:** модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности. **Владеет:** навыками модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.	
	ОПК-3.3. Имеет практический опыт составления математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности.	**Знает:** составление математических моделей для решения различных задач. **Умеет:** разрабатывать математические моделей для решения задач. **Владеет:** навыками разработки составления математических моделей для решения задач.	

ПК-1. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	**ПК-1.1.** Обладает умением сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	**Знает:** основы теории вероятностей и математической статистики, численные методы и современные языки программирования. **Умеет:** применять современные научные исследования для решения различных задач математических и естественных наук. **Владеет:** навыками программирования на современных языках и методами построения математических моделей.	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен
	ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научноисследовательской деятельности в математике и информатике. продукта.	**Знает:** методы построения математически модеелей. ; **Умеет:** решать задачи, связанные с исследованием операций и численными методами. **Владеет:** методами построения математических моделей.	
	ПК-1.3. Имеет практический опыт использования методов современных научных исследований.	**Знает:** методы исследования прикладных задач; современные информационные технологии. **Умеет:** применять методы исследования прикладных задач; современных информационных технологий. **Владеет:** навыками построения математических моделей для решения задач прикладного характера.	

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 академических часа.

4.2. Структура дисциплины.

Название разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Лекции	Практ. занятия	Лаборат. работы	Контр.сам. раб.		
Модуль 1. Корреляционная теория случайных процессов.								
Всего по модулю	VII		4	8	4		20	Контрольная работа, коллоквиум.
1.Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения	7		2	2	2		10	
2.Моментные функции случайного процесса, их свойства.	7		2	4	2		10	
Модуль 2. Стационарные случайные процессы.								
Всего по модулю 2.	7		4	8	6		20	Контрольная работа, коллоквиум.
1.Стационарные случайные процессы. Эргодичность процесса.	7		2	4	2		10	
2. Гаусовские случайные процессы.	7		2	4	2		10	
Модуль 3. Марковские случайные процессы.								
Всего по модулю 3	7		6	8	6		16	Контрольная работа, коллоквиум.
1.Марковские процессы. Цепи Маркова.	7		2	2	2		6	
2.Однородные цепи Маркова. Эргодичность цепей.	7		2	4	2		6	

3.Стохастические дифференциальные уравнения Ито	7		2	2	2		4	
Модуль 4.	Подготовка к экзамену.						36	
Итого за VII семестр			14	24	14		96	

4.3. Содержание дисциплины, структурирование по темам (разделом)

Лекции.

Модуль 1. Корреляционная теория случайных процессов.

Тема1.Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения. Случайные величины, функции, процессы, поля. Траектория и сечение случайного процесса. Системы конечномерных распределений случайного процесса, свойства согласованности и симметричности. Теорема Колмогорова. Стохастическая эквивалентность, сепарабельность.

Тема 2. Моментные функции случайного процесса, их свойства.

Функции математического ожидания, дисперсии и ковариации случайного процесса. Нормированная ковариационная функция, свойства моментных функций: не отрицательность ковариационной функции при равенстве аргументов, симметричность, ограниченность, неотрицательная определенность. Взаимная ковариационная функция случайных процессов.

Модуль 2. Стационарные случайные процессы.

Тема 3. Стационарные случайные процессы. Эргодичность процесса.

Определения стационарности случайного процесса в строгом и широком смыслах. Свойства ковариационной функции стационарного процесса. Взаимная стационарность случайных процессов. Среднее значение случайного процесса по аргументу на интервале, эргодичность процесса по математическому ожиданию, дисперсии, ковариационной функции. Критерий эргодичности по математическому ожиданию. Приближенная оценка математического ожидания случайного процесса в случае эргодичности.

Тема 4. Гауссовские случайные процессы.

Гауссовские случайные величины, вектора. Характеристическая функция гауссовских распределений в R^n , корреляционные оператор, матрица. Гауссовские случайные функции, процессы. Задание вероятностной меры. Линейные преобразование гауссовских величин, процессов.

Модуль 3. Марковские случайные процессы.

Тема 5. Марковские процессы. Цепи Маркова.

Общее определение марковского процесса. Переходные вероятности процесса, условие марковости, однородность процесса. Цепь Маркова, переходные вероятности, матрица переходных вероятностей, конечномерные распределения. Вектор распределений вероятностей. Уравнения Колмогорова-Чепмена для переходных вероятностей.

Тема 6. Однородные цепи Маркова. Эргодичность цепей.

Размеченный граф состояний конечной цепи Маркова. Классификация состояний. Возвратные и невозвратные состояния цепи Маркова, критерий возвратности.

Эргодичность однородной цепи, теорема Маркова. Стационарные распределения, финальные вероятности.

Тема 7. Стохастические дифференциальные уравнения Ито.
Стохастические дифференциальные уравнения Ито. Интеграл Ито. Формула Ито.

Практические занятия

Модуль1. Корреляционная теория случайных процессов.

Тема1. Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения.
Описание, нахождение траекторий и сечений случайного процесса. Проверка принципа согласованности конечномерных распределений, нахождение одномерных распределений процесса.

Тема2. Моментные функции случайного процесса, их свойства.
Вычисление осредненных характеристик случайного процесса. Определение взаимной ковариационной функции процессов. Свойства моментных функций.

Тема 3. Канонические представления случайного процесса. Разложение процессов с дискретным спектром. Гармоники процесса. Вычисление характеристики процесса по разложению.

Тема 4. Преобразования случайных процессов. Сходимость случайных процессов. Дифференцирование и интегрирование процессов. Преобразование случайных процессов динамическими системами.

Тема 5. Преобразование процессов динамическими системами. Линейные преобразования случайных процессов. Нелинейные преобразования решения задач.

Модуль2. Стационарные случайные процессы.

Тема 6. Стационарные случайные процессы. Эргодичность процесса.

Стационарность случайных процессов. Эргодичность случайного процесса. Среднее значение случайного процесса по аргументу на интервале. Приближенная оценка моментных характеристик случайного процесса средними значениями отдельных реализаций.

Тема7. Спектральное разложение стационарных случайных процессов.

Спектральное представление случайных процессов. Спектральные функция и плотность случайного процесса.

Тема8. Эффективные характеристики случайного процесса.эффективная ширина спектра эффективная длительность корреляции. Спектральная плотность.

Тема9. Гауссовские случайные процессы. Гауссовские случайные векторы, корреляционный оператор, матрица. Гауссовские случайные процессы.

Тема 10. Преобразование гауссовских случайных процессов. Конечномерные распределения гауссовских случайных процессов. Линейные преобразования гауссовских процессов.

Модуль3. Марковские случайные процессы.

Тема 11. Марковские процессы. Цепи Маркова. Цепи Маркова, переходные вероятности, матрица переходных вероятностей. Размеченный граф состояний конечной цепи Маркова.

Тема12. Однородные цепи Маркова. Эргодичность цепи. Классификация состояний. Вычисление переходных вероятностей, вероятностей состояний.

Тема13. Эргодичность цепи Маркова. Достаточные условия эргодичности. Решение задач.

Тема 14. Стационарное распределение вероятностей. Инвариантное распределение вероятностей. Финальные вероятностей. Вычисление предельных вероятностей.

Тема 15. Марковские цепи с непрерывным временем. Переходные вероятности. Плотности перехода из состояний в состояние. Системы уравнений Колмогорова.

Тема 16. Непрерывные Марковские процессы с конечным числом состояний. Системы уравнений Колмогорова для вероятностей состояний, решение задач.

Лабораторные занятия.

Модуль1. Корреляционная теория случайных процессов

Тема1. Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения.

Моделирование случайных систем с конечным числом равновероятных значений. Вычисление абсолютных и относительных частот выборки.

Тема2. Моментные функции случайного процесса, их свойства.

Разыгрывание случайного процесса с конечным числом равновероятных траекторий. Вычисление относительных частот выборки, оценка математического ожидания.

Тема3. Преобразование случайных процессов.

Моделирование случайного процесса равновероятных траекторий. Линейное преобразование процесса, элементов выборки.

Модуль 2. Стационарные случайные процессы.

Тема4. Стационарные случайные процессы. Эргодическая теория.

Разыгрывание случайного процесса с конечным числом траекторий заданных вероятностей. Приближенная оценка математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции. Установить, стационарен ли процесс.

Тема5. Спектральное разложение стационарных случайных процессов.

Моделирование случайного процесса с конечным числом траекторий заданных вероятностей. Приближенное спектральное представление разыгрываемого процесса.

Тема6. Гауссовские случайные процессы.

Моделирование гармонического случайного процесса с гауссовой случайной амплитудой заданных числовых характеристик.

Модуль3. Марковские случайные процессы.

Тема7. Марковские процессы. Цепи Маркова.

Вычисление переходных вероятностей цепи Маркова с искомой матрицей управления. Проверка уравнения Колмогорова-Чепмена.

Тема8. Однородные цепи Маркова. Эргодичность.

Проверка эргодичности цепи Маркова, управляемой заданной матрицей. Вычисление финальных вероятностей.

Тема9. Марковские цепи с непрерывным временем.

Приближенное решение на ЭВМ системы уравнений Колмогорова для вероятностей состояний.

5. Образовательные технологии.

В основе преподавания дисциплины *теория случайных процессов* лежит лекционно-семинарская система обучения в сочетании с лабораторными занятиями. Это связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала и дальнейшего приложения его к прикладным задачам. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

6.1. Задания для самостоятельной работы.

Модуль1. Корреляционная теория случайных процессов.

1. Случайный процесс $x(t)$ определен уравнением $x(t) = t\xi(\omega)$, $t \geq 0,$ где $\xi(\omega)$– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[1; 2]$. Описать множество траекторий и сечений случайного процесса.
2. Пусть случайный процесс задан соотношением $x(t) = \frac{1}{1+t^2}\xi(\omega)$, где$\xi(\omega)$ - равномерно распределенная на $[0; 1]$ случайная величина. Найти семейство одномерных распределений процесса.
3. Случайный процесс задан уравнением $x(t) = (t^2 + 1)\xi(\omega), t \in [0; 1]$, где $\xi(\omega)$ - случайная величина, имеющая показательные распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти семейство одномерных распределений процесса.
4. Случайный процесс задан уравнением $x(t) = \sin t \cdot \xi(\omega) + \cos t$, где$\xi(\omega)$ - случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 5, D(\xi) = 0{,}1$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса.
5. Случайный процесс $x(t)$ имеет вид
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \sin(it)\,, t \geq 0,$$
где $\xi_i(\omega)$ - действительные некоррелированные случайные величины с известными параметрами $M(\xi_i) = M_i, D(\xi_i) = D_i$.Найти ковариационную функцию и математическое ожидание.
6. Задана двумерная плотность случайного процесса $x(t)$ в виде
$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} exp\left\{-\frac{(x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2}{2}\right\}$$
Вычислить основные характеристики процесса $m_x(t), D_x(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$.
7. Случайный процесс $x(t) = t + V_1(\omega)\cos t + V_2(\omega)\cos t$, где V_1 и V_2 – центрированные и некоррелированные случайные величины с $D(V_1) = 0.1$ и $D(V_2) = 0.2$. Определить осредненные характеристики производной процесса.
8. Ковариационная функция с.к. – дифференцируемого случайного процесса $x(t)$ имеет вид $K_x(t_1, t_2) = De^{-\alpha|t_1-t_2|}\cos\beta(t_2 - t_1)\,, \alpha > 0, \beta > 0$. Определить дисперсию производной процесса.
9. Пусть случайный процесс $x(t)$, $t \geq 0$ имеет характеристически $m_x(t) = mt$,$K_x(t_1, t_2) = Dt_1t_2$, где $D > 0$. Вычислить характеристики процесса $y = s_0^t x(\tau)d\tau, t \geq 0$.

10.Пусть случайный процесс

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x_i(t)$$

где$x_i(t)$ – некоторые случайные процессы, $a_i(t)$ - неслучайные функции. Доказать, что

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i(t_1) a_i(t_2) K_{x_i x_j}(t_1, t_2).$$

Модуль 2. Стационарные случайные процессы.

1. Пусть$x(t)$ – стационарная в широком смысле дифференцируемая случайная функция. Показать, что ее производная$x'(t)$также стационарна в широком смысле.
2. Пусть $\xi(\omega)$ - случайная величина с плотностью распределения $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi/2$ и a, ν - постоянные. Будет ли случайный процесс $x(t) = a\sin(\nu t + \xi(\omega))$ стационарным?
3. Пусть$\xi(\omega)$ - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$. Доказать, что случайный процесс $x(t) = 5\sin(3t + \xi(\omega))$стационарный в широком смысле и эргодический по математическому ожиданию.

4. Пусть$x(t)$ - процесс Пуассона с параметром λ, а $u(t) = x(t) - \lambda t$. Будет ли этот процесс $u(t)$ эргодичен относительно своего математического ожидания?
5. Ковариационная функция стационарной случайной функции $x(t)$ задана в виде $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0, -\infty < \tau < +\infty$. Найти спектральную плотность $s(\lambda)$ и эффективные характеристики $\Delta\tau$ и $\Delta\lambda$.
6. Определить ковариационную функцию, дисперсию и эффективную ширину спектра стационарного процесса, имеющего спектральную плотность $s(\lambda) = \frac{3}{\pi(\lambda^2+9)}$.
7. Найти спектральную плотность, эффективную ширину спектра и средний интервал корреляции стационарного случайного процесса $x(t)$ с ковариационной функцией
$$K(\tau) = De^{-\alpha^2 t^2}, \alpha > 0.$$
8. Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ - случайные величины, совместное распределении которых – гауссовское. Показать, что случайный процесс $x(t) = \xi(\omega)\sin t + \eta(\omega)\cos t$ является гауссовским.
Найти математическим ожиданием и ковариационную функцию$x(t)$.
9. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса$x(t) = \xi(\omega) + t, t \ge 0$,где $\xi(\omega)$ - случайная величина с гауссовским распределением $N(0; \sigma^2)$, $\sigma > 0$.
10. Найти плотность конечномерного распределения процесса броуновского движения.

Модуль 3. Марковские случайные процессы.

1. Рассмотрим последовательность бросаний симметричной игральной кости. Пусть случайная величина $X(\omega)$ есть число очков, выпавших на грани при $n-$м бросании, $n = 1,2, \dots \dots$ Введем последовательность случайных величин по правилу
$$\xi(n) = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$
Показать, что последовательность $\xi(n)$ – марковская, и определить для нее переходную вероятность.
2. Показать, что процесс броуновского движения - марковский, и найти его переходную вероятность .
3. Вероятности перехода в простой однородной цепи Маркова дается матрицей
$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$
а) Чему равно число состояний этой цепи? б) Найти вероятности перехода из состояния в состояние за два шага.

4. Имеется простая однородная цепь Маркова с матрицей перехода $P = \|P_{ij}\|$. Вычислить: а) вероятность состояния E_i на $n-$м шаге, если известны все последующие состояния системы; б) вероятность E_i на $n-$м шаге, если известны все предыдущие и последующие состояния.
5. Цепь Маркова управляется матрицей перехода
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эргодична ли цепь?

6. Вероятность перехода дается матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

   а) Убедиться в эргодичности этой цепи.
   б) Найти предельные вероятности.

7. Цепь Маркова управляется матрицей перехода
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Классифицировать все состояния этой цепи. Будет ли цепь эргодична? Найти асимптотическое поведение $P_{ij}(n)$.

8. Вычислить вероятности состояний пуассоновского процесса, используя системы уравнений Колмогорова.

9. Показать, что интенсивности переходов однородного процесса не зависят от времени.

10. Предположим, что поток сбоев ЭВМ является простейшим с интенсивностью λ. Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается и производится ремонт, который длится в течение случайного времени $\tau\, t(\omega)$с распределением $E(\mu)$. Вычислить вероятность того, что в момент времени t ЭВМ находится в рабочем состоянии.

Литература:

1. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физмат, 2002.
2. Свешников А.А, и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Сп(б). Изд. «Лань», 2007.

6.2. Темы и содержание самостоятельной работы.

Разделы и темы для самостоятельного изучения.	Виды и содержание самостоятельной работы.
Седьмой семестр	
Модуль 1. Корреляционная теория случайных процессов.	
1. Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения.	1. Решение задач. 2.Доклад на тему : Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова.
2. Моментные функции случайного процесса, их свойства.	1. Решение задач. 2. Доклад на тему : Приближенное рассмотрение случайного процесса моментными функциями.
Модуль 2. Стационарные случайные функции.	
1. Стационарные случайные процессы. Эргодичность процесса.	1. Решение задач. 2. Реферат на тему: Стационарный режим случайного процесса. 3. Доклад на тему: Эргодичность процесса и его физическое прикладное содержание.
3. Гауссовские случайные процессы.	1. Решение задач. 2. Реферат на тему : Функции брауновского движения. 3. Доклад на тему: Винеровский случайный процесс.
Модуль 3. Марковские случайные процессы.	
1. Марковские процессы . Цепи Маркова.	1. Решение задач. 2. Доклад на тему: Ориентированный граф состояний, классификация состояний.
2. Однородные цепи Маркова. Эргодичность цепи.	1. Решение задач. 2. Доклад на тему : Эргодичность динамических систем, коэффициент эргодичности.
3. Стохастические дифференциальные уравнения Ито.	1. Решение задач. 2. Реферат на тему: Формула Ито.

7. Фонд оценочных средств, для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Типовые контрольные задания.

7.1.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиумам.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Корреляционная теория случайных процессов".

1. Что называется вероятностной моделью?
2. Как определяется сечение случайного процесса?
3. Что называется случайным полем?
4. Можно ли рассматривать случайный процесс как совокупность сечений?
5. Что такое n - мерная функция распределения случайного процесса?
6. Что такое траектория случайного процесса?
7. Напишите условия согласованности конечномерных распределений случайного процесса.
8. Если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то к чему стремится функция распределения $F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ случайного процесса?
9. Какие случайные процессы называются стохастически эквивалентными?
10. Приведите определения основных моментных функций случайного процесса.
11. Каким образом выражается дисперсия через ковариационную функцию?
12. Как определяется ковариационная функция связи двух случайных процессов?
13. Дайте определение векторного случайного процесса.
14. Приведите определение производной случайного процесса.
15. Приведите определение интеграла от случайной функции.
16. Напишите формулу связи ковариационных функций случайного процесса и его производной.
17. Приведите понятие линейного преобразования случайного процесса.
18. Пусть L_0- линейный однородный оператор и $y(t) = L_0 X(t)$. Напишите формулу связи ковариационных функций $K_x(t_1, t_2)$ и $K_y(t_1, t_2)$.
19. Пусть$y(t) = a(t)x(t) + b(t)$, где $x(t)$ - случайный процесс, а $a(t)$ и $b(t)$ - неслучайные функции. Каким образом связаны дисперсии процессов $x(t)$ и $y(t)$.
20. Пусть L_0- линейный однородный оператор и случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ связаны формулой $y(t) = L_0\{x(t)\}$. Показать, что $m_y(t) = L_0\{m_x(t)\}$.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Стационарные случайные процессы. Гауссовы процессы"

1. В каком случае случайный процесс называется стационарным в широком смысле?
2. Дайте определение стационарности в строгом смысле случайного процесса.
3. Приведите определение взаимной стационарности в широком смысле двух случайных процессов.
4. Справедливо ли утверждение "Стационарный в широком смысле случайный процесс стационарен и в строгом смысле"?
5. Верно ли предложение "Стационарный в строгом смысле случайный процесс стационарен и в широком смысле"?
6. Является ли производная стационарного в широком смысле и дифференцируемого процесса стационарным в широком смысле процессом?
7. Какой случайный процесс называется эргодическим по математическому ожиданию?
8. Сформулируйте критерий эргодичности случайного процесса по математическому ожиданию.

9. Приведите определение эргодичности случайного процесса по ковариационной функции.
10. Дайте определение эргодичности процесса по его дисперсии.
11. Какой случайный процесс называется случайным процессом с ортогональными приращениями?
12. Сформулируйте предложение о спектральном представлении стационарного случайного процесса.
13. Сформулируйте теорему Хинчина, приведите формулу спектрального представления ковариационной функции.
14. Приведите понятия спектральной функции, спектральной плотности случайного процесса.
15. Напишите формулы для эффективной ширины спектра и эффективной длительности корреляции случайного процесса.
16. Дайте определение гауссовского -мерного случайного вектора.
17. В каком случае процесс называется гауссовским.
18. Приведите выражение для характеристической функции -мерного вектора сечений гауссовского процесса.
19. Является ли линейное преобразование гауссовских систем гауссовским?
20. Справедливо ли утверждение "Производная дифференцируемого гауссовского процесса является гауссовским"?

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Марковские случайные процессы".

1. Какой случайный процесс называется марковским?
2. Приведите уравнение Колмогорова - Чепмена для переходной вероятности марковского процесса.
3. Дайте определение однородного марковского процесса.
4. Каково уравнение Колмогорова - Чепмена для однородного марковского процесса?
5. Какая функция называется переходной плотностью распределения марковского случайного процесса?
6. Приведите определение цепи Маркова.
7. Что такое переходная вероятность цепи Маркова?
8. В каком случае цепь Маркова называется однородной?
9. Какая матрица называется матрицей переходных вероятностей цепи Маркова?
10. Напишите формулу связи $P(n)$ и $P(1)$ однородной цепи Маркова.
11. В каком случае состояние цепи Маркова называется возвратным?
12. Какие состояния цепи Маркова называются невозвратными?
13. Сформулируйте критерий возвратности состояния однородной цепи Маркова.
14. Приведите определение предельных вероятностей цепи Маркова.
15. Сформулируйте теорему Маркова об эргодичности однородной цепи Маркова с конечным числом состояний.
16. Что такое интенсивность, плотность перехода из одного состояния в другое цепи Маркова с непрерывным временем?
17. Приведите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для марковского процесса.
18. Какой вид имеет система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний?

19. Какой режим динамики цепи Маркова с непрерывным аргументом называется стационарным?
20. Приведите систему однородных алгебраических уравнений для вероятностей состояний при стационарном режиме цепи Маркова с непрерывным временем.

7.1.2. Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

Правильный ответ	Формулировка тестового задания
2)	Пусть случайный процесс $x(t) = t\xi(\omega)$, где $\xi(\omega) -$ случайная величина, равномерно распределённая на [0;2]. Тогда математическое ожидание сечения $x(2)$равно: 1) 5; 2) 2; 3)4; 4)1.
1)	Случайный процесс $x(t) = (t^2 + 1)\xi(\omega)$, где $\xi(\omega)$ – некоторая случайная величина с положительными значениями. Тогда верно утверждение 1) траектории процесса есть параболы, лежащие в верхней полуплоскости. 2) реализации есть прямые. 3) траектории есть параболы, ветви которых направленны вниз. 4) реализации есть окружности с центром в начале координат
2)	Случайный процесс задан уравнением $x(t) = \xi(\omega)\sin t + \cos t$, где $\xi(\omega)$- случайная величина с $M(\xi) = 3$ и $D(\xi) = 0{,}2$. Математическое ожидание процесса равно: 1) $3\sin t$; 2) $3\sin t + \cos t$; 3) $3\cos t$; 4) $0{,}2\sin t$.
3)	Выберите верное утверждение: 1) траектория случайного процесса есть случайная величина. 2) сечение случайного процесса есть неслучайная функция. 3) двумерная функция распределения случайного процесса принимает значения на отрезке [0;2].
2)	Дисперсия $D(t)$ и ковариационная функция $K(t_1;t_2)$ случайного процесса связанны равенством 1) $D(t) = K(t,2t)$; 2) $D(t) = K(t,t)$. 3)$D(t) = K(2t,t)$; 4) $D(t) = K(2t,2t)$
1)	Дисперсия$D(t)$и ковариационная функция $K(t_1;t_2)$ случайного процесса удовлетворяют неравенству: 1) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert \leq \sqrt{D(t_1)D(t_2)}$. 2) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert > 2D(t_1)D(t_2)$. 3) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert > D(t_1) + D(t_2)$
2)	Пусть случайный процесс $x(t)$ дифференцируем в среднеквадратичном и $z(t) = x'(t)$. Если $m_x(t) = \sin 2t$, то $m_z(t)$ равно: 1) $\cos 2t$; 2) $2\cos 2t$; 3) $\sin 4t$; 4)$\cos 4t$.
1)	Пусть случайный процесс $x(t)$ интегрируем в среднеквадратичном на [0;1] и $$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$ Если $m_x(t) = \cos\frac{t}{2}$, то $m_y(t)$ равно: 1) $2\sin\frac{t}{2}$; 2) $-2\sin\frac{t}{2}$; 3) $-2\sin\frac{t}{2}$; 4) $\cos^2\frac{t}{2}$; 5) $\sin^2\frac{t}{2}$.
1)	Случайный процесс $x(t)$ стационарен в широком смысле. Выберите верное утверждение: 1) дисперсия процесса постоянна. 2) математическое ожидание постоянно, а дисперсия переменна. 3) математическое ожидание и дисперсия переменны.
2)	Ковариационная функция стационарного процесса имеет вид $K(\tau) = 4e^{-\lvert\tau\rvert}$, тогда дисперсия процесса равна: 1) $4e^{\tau}$; 2) 4; 3) $4e^{2\tau}$; 4)$e^{-2\tau}$.
3)	Случайный процесс $x(t)$ эргодичен в среднем квадратичном по математическому ожиданию, если:

	1) этот процесс дифференцируем и интегрируем в среднем квадратичном. 2) существует среднее значение по аргументу на любом конечном промежутке [0;T]. 3) его среднее значение по аргументу $< x >_0^T$ сходится при $T \to \infty$ в среднем квадратичном к значению математического ожидания $m_x(t)$.
2)	Необходимым и достаточным условием эргодичности в среднем квадратичном по математическому ожиданию случайного процесса второго порядка является существование предела: 1) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T K_x(t,t)dt = 0.$ 2) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_0^T K_x(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0.$ 3) $\lim_{t\to\infty} K_x(t,t)dt = 0.$ 4) $\lim_{\substack{t_1\to\infty \\ t_2\to\infty}} K_x(t,t)dt = 0.$
3)	Выберите верное утверждение: 1) если случайный процесс стационарен, то он и эргодичен по математическому ожиданию; 2) всякий эргодичный случайный процесс по математическому ожиданию стационарен; 3) если случайный процесс стационарен и $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по математическому ожиданию.
1)	Выберите верное утверждение: 1) если случайный процесс x(t) стационарен и $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по дисперсии; 2) для того чтобы стационарный процесс x(t) был эргодичен по дисперсии, необходимо и достаточно выполнение равенства $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$; 3) если случайный процесс x(t) стационарен и $\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по математическому ожиданию.
4)	Стационарный случайный процесс x(t) эргодичен по ковариационной функции, если он: 1) непрерывен в среднем квадратичном на любом конечном промежутке [0,T]; 2) ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов; 3) ковариационная функция четна; 4) ковариационная функция удовлетворяет условию $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$;
2)	Случайный процесс x(t) задан спектральным разложением$x(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} dz(\nu)$.Случайный процесс z($\gamma$) является: 1) процессом с отличным от нуля математическим ожиданием. 2) процессом с ортогональными приращениями. 3) центрированным процессом с коррелированными приращениями.
3)	Ковариационная функция K(τ) стационарного случайного процесса x(t) в виде $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} dS(\nu)$. Тогда функция S(γ) должна быть: 1) монотонно убывающей, неотрицательной, ограниченной снизу; 2) отрицательной, монотонно неубывающей, ограниченной сверху; 3) неотрицательной монотонно неубывающей, ограниченной сверху, непрерывной слева.
1)	Если s(γ) есть спектральная плотность случайного процесса, и$K_x(\tau)$ – его ковариационная функция, то имеет место формула: 1) $K(\tau) = \int_{-\infty}^{\gamma} e^{i\gamma\tau} s(\gamma)d\gamma$; 2)$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-i\gamma\tau} s(\gamma)d\gamma$; 3) $K(\tau) = \int_0^{\gamma} e^{i\gamma\tau} s(\gamma)d\gamma$; 4)$K(\tau) = \int_0^{\gamma} e^{-i\gamma\tau} s(\gamma)d\gamma$;
2)	Случайный процесс x(t) стационарен, s(γ) – спектральная плотность, K(τ) – ковариационная функция. Тогда справедливо соотношение: 1) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma\tau} K(\tau)d\tau$; 2) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\gamma\tau} K(\tau)d\tau$;

	3) $s(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{i\gamma\tau}K(\tau)d\tau$; 4) $s(\gamma)=\int_0^{+\infty}e^{-i\gamma\tau}K(\tau)d\tau$;
3)	Пусть случайный процесс вещественен, s(γ) есть спектральная плотность спектрального представления ковариационной функции K(τ). Тогда справедлива формула: 1) $s(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}K(\tau)cos\gamma\tau d\tau$; 2) $s(\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}K(\tau)sin\gamma\tau d\tau$; 3) $s(\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}K(\tau)cos\gamma\tau d\tau$; 4) $s(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}K(\tau)sin\gamma\tau d\tau$;
4)	Ковариационная функция вещественного стационарного процесса задана спектральным представлением $K(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$. Тогда имеет место уравнение: 1) $K(\tau)=\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\gamma$; 2) $K(\tau)=\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\tau$; 3) $K(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\gamma$; 4) $K(\tau)=2\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\tau$;
3)	Действительный случайный процесс $x(t),\ t\epsilon T$ называется гауссовским, если его характеристическая функция $\varphi(\vec{z};\vec{t}), z_i\epsilon R^1, t_i\epsilon\ T, i=1,2,..n$ имеет вид: 1) $\varphi(\vec{z};\vec{t})=exp\{i(\vec{m},\vec{z}\}$, где $m_i=M\{x(t_i)\}$; 2)$\varphi(\vec{z};\vec{t})exp\{-(R\vec{z},\vec{z})\}$, где R матрица ковариаций сечений$x(t_i)$; 3) $\varphi(\vec{z};\vec{t})=exp\left\{i(\vec{m},\vec{z})-\frac{1}{2}(R\vec{z},\vec{z})\right\}$; 4) $\varphi(\vec{z};\vec{t})=exp\{i(\vec{m},\vec{z})-(R\vec{z},\vec{z})\}$;
1)	Гауссовский случайный процесс $x(t), t\geq 0$ с непрерывным временем называется стандартным винеровским процессом, если: 1) $x(0)=0, m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 2) $m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\max(t,s),\ t,s\geq 0$; 3) $x(0)=0, m_x(t)>0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 4) $m_x(t)>0, coV\{x(t),x(s)\}=\max(t,s),\ t,s\geq 0$;
2)	Гауссовский случайный процесс $x(t), t\geq 0$ с непрерывным временем называется процессом броуновского движения, если: 1) $x(0)>0, m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 2) $x(0)=0, m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 3) $m_x(t)>0, coV\{x(t),x(s)\}=\max(t,s),\ t,s\geq 0$;
1)	Линейное преобразование гауссовских систем: 1) является гауссовской системой; 2) не гауссовская система; 3) необязательно гауссовская система;
1)	Переходная вероятность марковского процесса x(t) определяется по формуле: 1) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_2)\epsilon B\vert\ x(t_1)=x_1\}$; 2) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_2)=x_1,\ x(t_2)\epsilon B\}$; 3) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_1)=x_1\}\cdot P\{\ x(t_2)\epsilon B\}$; 4) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_1)=x_1\vert\ x(t_2)\epsilon B\}$.
2)	Переходная вероятность марковского процесса x(t) удовлетворяет уравнениию: 1) $P(t_1,x_1,t_2,B)=\int_{R^1}P(t_1,x_1,u,dy)P(t_1,x_1,u,y)$; 2) $P(t_1,x_1,t_2,B)=\int_{R^1}P(t_1,x_1,u,dy)P(u,y,t_2,B)$; 3) $P(t_1,x_1,t_2,B)=\int_{R^1}P(u,dy,t_2,B)P(t_1,x_1,u,y)$.
3)	Цепь Маркова управляется матрицей $P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9\\ 0.8 & 0.2\end{pmatrix}$. Чему равна переходная вероятность $p_{22}(2)$? 1) 0.64; 2) 0.74; 3) 0.76; 4) 1.54.

1)	Цепь Маркова управляется матрицей $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$. Финальные вероятности равны: 1) $p_1^* = \frac{6}{13}, p_2^* = \frac{7}{13}$; 2) $p_1^* = 1, p_2^* = 0$; 3) $p_1^* = 1, p_2^* = 0$; 4) $p_1^* = \frac{3}{4}, p_2^* = \frac{1}{4}$;
2)	Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти сумму вероятностей $P_{11}(3) + P_{11}(13) + P_{11}(20)$. 1) 4; 2) 3; 3) 6.5; 4) 7.

7.1.3. Варианты контрольных работ для текущего контроля.

Контрольная работа №1.

Вариант №1

1. Случайный процесс$x(t)$задается уравнением
   $x(t) = t^2 + \xi(\omega),\ t \geq 0,$ где $\xi(\omega)$-случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-2; 2]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса.
2. Найти осредненные характеристики случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega) \sin t + \cos t$, где $\xi(\omega)$- случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 3,\ \ D(\xi) = 0.2$.

Вариант №2

1. Найти одномерную функцию распределения случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega)t^2 + 5,\ t \geq 0$, где $\xi(\omega)$- нормально распределенная случайная величина с характеристиками
   $$M(\xi) = 0,\ \ D(\xi) = 1$$
2. Ковариационная функция стационарного случайного процесса $x(t)$ имеет вид $k(\tau) = 0.1e^{-|\tau|}, -\infty < \tau < \infty$.
   Найти спектральную плотность и эффективные характеристики $\Delta\gamma$ и $\Delta\tau$

Вариант №3

1. Случайный процесс$x(t)$задается уравнением

$x(t) = \sin t + \xi(\omega),\ t \geq 0,$ где $\xi(\omega)$-случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-4; 4]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса.

2. Случайный процесс$x(t)$задан формулой
   $x(t) = \sin t + \xi(\varpi)(t^2 + 1),\ t \geq 0,$ где $\xi(\varpi)$- случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 10,\ \ D(\xi) = 0.1$.
   Найти ковариационную функцию процесса $y(t) = \int_0^t x(t) d\tau$

Вариант №4

1. Случайный процесс$x(t)$задан каноническим разложением
   $x(t) = t^3 + \xi(\varpi) \sin t + \zeta(\varpi) \cos t,\ t > 0$ причем
   $D(\xi) = 0.2,\ \ D(\zeta) = 0.3$ вычислить осредненные характеристики процесса$z(t) = x'(t)$.

2. Определить эффективную ширину спектра стационарного случайного процесса с спектральной плотностью

$s(v) = \frac{10}{v^2+y}, -\infty < v < \infty$

<u>Контрольная работа №2.</u>

Вариант №1

1. Установить является ли стационарным случайный процесс
$x(t) = 10\sin\big(3t + \xi(\varpi)\big)$, где $\xi(\varpi)$- случайная величина, равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$.
2. Матрица переходных вероятностей за один шаг цепи Маркова имеет вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Найти финальные вероятности цепи Маркова.

Вариант 2.

1. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса
$x(t) = \xi(\omega) + t, t > 0,\ \xi(\omega) -$ случайная величина с гауссовским распределением $N(0;\ \sigma^2)$.
2. Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова имеет вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Найти сумму вероятности $P_{11}(1) + P_{22}(2) + P_{33}(3)$.

Вариант 3.

1. Случайный процесс$N(t)$представляет собой простейший пуассоновский поток отказов радиотехнической системы с интенсивностью 0,002 отказа в час. Найти вероятность того, что за 100 часов наступит не менее 3 отказов.
2. Найти наиболее вероятное состояние в момент времени $t = 2$ цепи Маркова с начальным распределением $\vec{p}(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и матрицей переходных вероятностей

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 4.

1. Гауссовский случайный процесс имеет вид $x(t) = 3\xi(\omega) + t,$ где $\xi(\omega) -$ гауссовы случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 0$ и $D(\xi) = \sigma^2$.
Найти матрицу ковариаций для моментов времени t_1 и t_2.
2. При каких значениях параметров β и σ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1/6 & 1/6 \\ \beta & 2\beta & 3\beta \\ \sigma & 3\sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

Является матрицей переходных вероятностей однородной цепи Маркова с тремя состояниями?

7.1.4. Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов.

1. Конечномерные распределения случайного процесса. Принципы согласования.
2. Стохастическая эквивалентность случайных процессов.
3. Осредненные характеристики случайного процесса.
4. Описание случайного процесса моментными характеристиками.
5. Преобразование случайных процессов динамическими системами.
6. Дифференцирование случайных процессов.
7. Интегрирование случайных процессов.
8. Линейные преобразования случайных процессов.
9. Стационарность случайных процессов.
10. Эргодичность случайных процессов.
11. Процессы с ортогональными приращениями.
12. Спектральное представление стационарных случайных процессов.
13. Спектральное представление ковариационной функции стационарного процесса
14. Эффективные характеристики случайного процесса
15. Гауссовские случайные системы
16. Винеровские случайные процессы
17. Линейные преобразования гауссовских систем
18. Марковские процессы. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
19. Цепи Маркова. Переходные вероятности.
20. Ориентированный граф состояния цепи Маркова.
21. Классификация состояний. Возвратность состояний.
22. Эргодичность цепи Маркова.
23. Марковские цепи с непрерывным временем. Основные понятия.
24. Система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей.
25. Система дифференциальных уравнений для вероятностных состояний.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.
Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля -50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
─посещение занятий – 10 баллов,
─участие на практических занятиях – 10 баллов
─выполнение лабораторных заданий – 10 баллов,
─коллоквиум – 30 баллов,
─выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
─устный опрос(экзамен)- 100 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

а) основная литература:

1.Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. - Москва : Физматлит, 2007. - 318 с. - ISBN 978-5-9221-0206-3 ; То же [Электронныйресурс]URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76563.

2.Вентцель Елена Сергеевна. Теория случайных процессов и её инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Вентцель, Елена Сергеевна, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с. : ил. - Рекомендовано МО РФ. - ISBN 978-5-06-005820-8 : 275-00.

3. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996.

4. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 2005.

5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций : учеб. пособие / [авт. кол.: Б.Г.Володин и др.]; под общ. ред. А.А.Свешникова. - Изд. 4-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 445,[3] с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0708-8 : 287-10.

б) дополнительная литература:

1. Булинский, А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. - Москва : Физматлит, 2005. - 403 с. - ISBN 978-5-9221-0335-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68121 .

2. Свешников, Арам Арутюнович. Прикладные методы теории марковских процессов : учеб. пособие / Свешников, Арам Арутюнович. - СПб. и др. : Лань, 2007. - 190 с. : ил. - (Лучшие классические учебники. Математика) (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0719-4 : 242-00.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

3. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов.
М.: Наука, 1977.

4. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Наука, 2008.

5. Натан, Андрей Андреевич.Основы теории случайных процессов : [Учеб. пособие по курсу "Случайн. процессы"] / Натан, Андрей Андреевич ; О.Г.Горбачёв, С.А.Гуз. - М. : МЗ-пресс: Отарашвили, 2003. - 163,[2] с. : ил. ; 20 см. - (Серия "Естественные науки. Математика. Информатика"). - Библиогр.: с. 165. - Рекомендовано УМО РФ. - ISBN 5-94073-055-8 : 141-00.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

6. Гмурман, Владимир Ефимович.Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для вузов / Гмурман, Владимир Ефимович. - 6-е изд., доп. - М. : Высш. шк., 2002. - 403,[1] с. ; 21 см. - ISBN 5-06-004212-X : 90-60

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети <<Интернет>>, необходимых для освоения дисциплины

1. Федеральный портал http://edu.ru:
2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ http://elib.dgu.ru: http://edu.icc.dgu.ru:

10.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Учебная программа по теории случайных процессов распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче экзамена.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий к решению прикладных задач. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

На лабораторных занятиях каждый студент получает задание для самостоятельного выполнения, как правило, разыгрывание, моделирование случайных систем по данной теме. После выполнения лабораторной работы рекомендуется организовать защиту этой лабораторной работы.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по теории случайных процессов рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины теории случайных процессов. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.