



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Разностные схемы**

Кафедра прикладной математики факультета математики  
и компьютерных наук

Образовательная программа  
**01.04.02 - Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) программы  
**Математическое моделирование и вычислительная математика**

Уровень высшего образования  
**Магистратура**

Форма обучения  
**Очная**

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП

**Махачкала 2021**

Рабочая программа дисциплины «Разностные схемы» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика (уровень магистратура) от «\_10\_» \_\_\_\_\_ 01 \_\_\_\_\_ 2018 г. № 13.

Разработчик:

1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент Абдурагимов;

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от «\_22\_» \_06\_ 2021г., протокол №\_10\_

Зав. кафедрой Кадиев Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «\_23\_» \_\_\_\_\_ 06 \_\_\_\_\_ 2021 г., протокол №\_6\_.

Председатель Бейбалаев Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «\_9\_» \_\_\_\_\_ 07 \_\_\_\_\_ 2021 г. \_\_\_\_\_

(подпись)

Начальник УМУ Гасангаджиева Гасангаджиева А.Г.  
(подпись)

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Разностные схемы» входит в *обязательную* часть образовательной программы *магистратуры* по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов по разностным схемам, применяемых к численному решению задач для дифференциальных уравнений, к решению и исследованию разностных уравнений. Предусматривается изучение различных разностных схем (явных и неявных, устойчивых и неустойчивых и т.д.), их применение к решению практических задач разностных и дифференциальных задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных – ОПК-1, профессиональных – ПК-1.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме устного опроса, контрольных работ, зачета по лабораторным работам и промежуточный контроль в форме зачета.

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семес тр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет по лаб. работам, контрольная работа, экзамен)
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лек ции	Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции				
2	72	6	22				44	зачет

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Разностные схемы» являются: усвоение способов составления различных разностных схем, методов их решения и решения разностных уравнений и типичных задач для этих уравнений, решения уравнений математической физики, научить самостоятельно решать различные задачи для разностных схем и для конечных разностных уравнений, научить самостоятельно исследовать устойчивость разностных схем и уравнений, привить обучающимся умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по математике, развить у них математический стиль мышления.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина «Разностные схемы» входит в *обязательную* часть образовательной программы *магистратуры* по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика и изучается в соответствии с учебным планом во 2 семестре (обязательная часть). Предполагает знание основ вузовской алгебры, знание метода сеток решения дифференциальных уравнений, умение пользоваться различными пакетами прикладных программ. Магистр, изучив эту дисциплину, должен научиться составлять алгоритмы решения типичных задач для разностных схем и уравнений и реализовать их на ЭВМ. При составлении математических моделей физических и технических задач могут возникать различные разностные схемы и уравнения. Поэтому умение их решать и исследовать устойчивость является важнейшей задачей магистра как специалиста по направлению математическое моделирование вычислительная математика.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
<b>ОПК-1</b> Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	<b>ОПК-1.1</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук  <b>ОПК-1.2</b> Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности  <b>ОПК-1.3</b> Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной	<b>Знает:</b> основы составления разностных схем  <b>Умеет:</b> исследовать разностные схемы на сходимость  <b>Владет:</b> навыками выбора методов исследования разностных	Конспектирование и изучение лекционного материала, опрос, выполнение лабораторных работ, самостоятельная подготовка.

	деятельности на основе теоретических знаний, полученных в области математических и (или) естественных наук	схем	
<b>ПК-1</b> Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	<b>ПК-1.1</b> Обладает умением сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям  <b>ПК-1.2</b> Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике  <b>ПК-1.3</b> Имеет практический опыт использования методов современных научных исследований	<b>Знает:</b> методы составления разностных схем  <b>Умеет:</b> применять разностные схемы к решению дифференциальных и разностных уравнений  <b>Владет:</b> навыками современного математического аппарата и информационных технологий в исследовательской и прикладной деятельности	Конспектирование и изучение лекционного материала, опрос, выполнение лабораторных работ, самостоятельная подготовка.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часа.

4.2. Структура и содержание дисциплины (модули)

№ п/п	Раздел и темы дисциплины по модулям	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации
			Лекции	Практика	Лабор.	Самостоятельная работа в т.ч. экзамен	
<b>Модуль 1. Разностные уравнения и разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений</b>							
1	Обыкновенные	2	2		6	8	Опрос,

	разностные уравнения						лабораторная работа
2	Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений		2	8	10		
<b>Всего по модулю 1</b>			<b>4</b>	<b>14</b>	<b>18</b>		<b>Защита лабораторных заданий</b>
<b>Модуль 2. Разностные схемы для уравнений с частными производными</b>							
1	Разностные схемы для уравнений с частными производными	2	2	8	26		Опрос, лабораторная работа
<b>Всего по модулю 2</b>			<b>2</b>	<b>8</b>	<b>26</b>		<b>Защита лабораторных заданий</b>
<b>ИТОГО ЗА 2 СЕМЕСТР</b>			<b>6</b>	<b>22</b>	<b>44</b>		<b>Зачет</b>
<b>ИТОГО:</b>			<b>6</b>	<b>22</b>	<b>44</b>		<b>72</b>

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

### **Модуль 1. Разностные уравнения и разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений**

#### **Тема 1. Обыкновенные разностные уравнения.**

Понятие о разностных уравнениях и схемах. Разностные уравнения второго порядка, их исследование. Разностные краевые Задачи для уравнения второго порядка. Метод прогонки.

#### **Тема 2. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Аппроксимация обыкновенных дифференциальных уравнений разностными схемами, устойчивость, сходимость. Методы решения разностных схем, алгоритмы.

### **Модуль 2. Разностные схемы для уравнений с частными производными**

#### **Тема 1. Разностные схемы для уравнений с частными производными.**

Аппроксимация уравнений в частных производных разностными схемами, устойчивость, сходимость. Разностные схемы, аппроксимирующие типичные задачи для уравнений параболического типа второго порядка. Разностные схемы, аппроксимирующие типичные задачи для уравнений эллиптического типа второго порядка. Разностные схемы, аппроксимирующие типичные задачи для уравнений гиперболического типа второго порядка.

#### 4.3.2. Содержание лабораторных занятий по дисциплине

№ п/п	Тема	Аудиторные часы
	<b><i>Модуль 1. Разностные уравнения и разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений</i></b>	<b>14</b>
1.1 лб	Разностное уравнение второго порядка, исследование на устойчивость, методы решения.	2
1.2 лб	Решение разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	2
1.3 лб	Решение разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на компьютере.	2
1.4 лб	Составление разностных схем для решения задач Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2
1.5 лб	Исследование на устойчивость разностных схем для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2
1.6 лб	Алгоритм и программа решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на компьютере.	2
1.7 лб	Результаты решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на компьютере, анализ.	2
	<b><i>Модуль 2. Разностные схемы для уравнений с частными производными</i></b>	<b>8</b>
2.1 лб	Явная двухслойная разностная схема, аппроксимирующая задачу Коши для параболического уравнения второго порядка. Порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость.	2
2.2 лб	Алгоритм нахождения решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с заданной точностью по явной двухслойной разностной схеме	2
2.3 лб	Неявная двухслойная разностная схема, аппроксимирующая смешанную граничную задачу для параболического уравнения второго порядка. Порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость.	2
2.4 лб	Алгоритм нахождения решения смешанной граничной задачи для параболического уравнения второго порядка с заданной точностью по неявной двухслойной разностной схеме .	2

#### 5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. Параллельно материал транслируется на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации слайд-презентаций).

Для проведения лабораторных занятий на факультете имеются 4 компьютерных класса, оснащенные современными компьютерами с необходимым программным обеспечением.

Студенты имеют свободный доступ к интернет-ресурсам. Университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### 6.1. Виды и порядок выполнения самостоятельной работы

1. Изучение рекомендованной литературы.
2. Решение задач.
3. Выполнение лабораторных работ.

№	Виды самостоятельной работы	Вид контроля	Учебно-методич. обеспечения
1	Изучение рекомендованной литературы	Устный опрос по разделам дисциплины	См. разделы 8, 9 данного документа
2	Решение задач	Проверка домашнего задания	См. разделы 8, 9 данного документа
3	Выполнение лабораторных работ	Зачет по лабораторной работе	См. разделы, 8, 9 данного документа

### 6.2 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

#### Примерные вопросы устного опроса по модулю 1

- *Разностное уравнение первого порядка. Фундаментальное решение.*
- *Ограниченность фундаментального решения.*
- *Построение фундаментального решения.*
- *Разностное уравнение второго порядка. Однородное и неоднородное и неоднородное уравнения второго порядка.*
- *Фундаментальное решение разностного уравнения второго порядка.*
- *Краевая задача для разностного уравнения второго порядка. Определение хорошей обусловленности.*
- *Достаточный признак хорошей обусловленности.*
- *Критерий хорошей обусловленности.*
- *Метод прогонки решения краевой задачи для разностного уравнения второго порядка.*
- *Основные понятия теории разностных схем: узел, сетка, аппроксимация, устойчивость, сходимость, порядок аппроксимации, порядок сходимости.*
- *Примеры устойчивой и неустойчивой разностных схем.*



- Достаточный признак устойчивости разностных схем решения задачи Коши.
- Необходимый спектральный признак устойчивости..
- Наиболее употребительные разностные схемы Рунге-Кутты и Адамса, их сходимость.
- Методы решения разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи (метод стрельбы, метод прогонки, метод Ньютона).

Литература: [2],[5], [6] и лекции.

### Примерные вопросы устного опроса по модулю 2

- Простейшие приемы построения аппроксимирующих разностных схем (замена производных разностными отношениями, метод неопределенных коэффициентов, схемы предиктор-корректор и др.).
- Условие Куранта, Фридрихса и Леви, необходимое для сходимости.
- Необходимый спектральный признак устойчивости.
- Принцип максимума
- Экономичные разностные схемы.
- Конструкция разностных схем расщепления.

Литература: [2], [3] и лекции.

### Примерная самостоятельная работа

#### Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения  $3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1} = 0$ .
2. Найти ограниченное при  $n \rightarrow \pm\infty$  ненулевое решение уравнения  $u_{n+1} - u_n - 2u_{n-1} = 0$ .
3. Найти ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  решение уравнения  $2u_{n+1} + 3u_n - 2u_{n-1} = 6$ , если  $u_0 = 4$ .
4. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} + 2u_n + 2u_{n-1} = 0$ .
5. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} - \frac{u_n}{n+1} = 0$  при

#### Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения  $4u_{n+1} + u_{n-1} = 0$ .
2. Найти ограниченное при  $n \rightarrow -\infty$  решение уравнения  $3u_{n+1} - 8u_n - 3u_{n-1} = 0$ , если  $u_0 = 3$ .
3. Существует ли ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  ненулевое решение уравнения  $u_{n+1} + 4u_n + 8u_{n-1} = 0$ ? Ответ обосновать.
4. Найти ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  решение уравнения  $4u_{n+1} - 7u_n - 2u_{n-1} = 5$ , если  $u_0 = 3$ .
5. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}u_n = 0$  при  $n \geq 0$ .

Вариант 3

1. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 0$ .
2. Найти ограниченное при  $n \rightarrow -\infty$  решение уравнения  $u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n-1} = 0$ , если  $u_0 = 1, u_1 = 2$ .
3. Существует ли ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  ненулевое решение уравнения  $u_{n+1} - 6u_n + 9u_{n-1} = 0$ ? Ответ обосновать.
4. Найти ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  решение уравнения  $4u_{n+1} - 2u_n - u_{n-1} = 3$ , если  $u_0 = 5$ .
5. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} - (n+1)u_n = 0$  при  $n \geq 0$ .

Вариант 4

1. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} + \frac{5}{2}u_n + u_{n-1} = 9n$ .
2. Найти ограниченное при  $n \rightarrow -\infty$  решение уравнения  $u_{n+1} - 8u_n + 16u_{n-1} = 0$ , если  $u_0 = 4$ .
3. Существует ли ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  ненулевое решение уравнения  $u_{n+1} + 4u_{n-1} = 0$ ? Ответ обосновать.
4. Найти ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  решение уравнения  $4u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 9$ , если  $u_0 = 5$ .
5. Найти общее решение уравнения  $u_{n+1} - \frac{n+2}{n+1}u_n = 0$  при  $n \geq 0$ .

Литература по самостоятельной работе: [1] и лекции.

**7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

**7.1. Типовые контрольные задания**

**Примерная контрольная работа**

**1 ВАРИАНТ**

Написать разностную схему, аппроксимирующую на сетке

$\{x_m = mh, y_n = nl, m = \overline{0, M}, n = \overline{0, N}\}$  задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 1) = 1 + x^2, \quad u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = 1 + y^2. \end{cases}$$

Какими методами можно найти решение полученной разностной схемы?

2. Определить порядок аппроксимации задачи Дирихле в области  $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  с границей  $\Gamma$

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D,$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

разностной схемой

$$\begin{cases} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} = \frac{x_{m+1}^2 + y_{n+1}^2 + x_{m-1}^2 + y_{n-1}^2}{2}, \\ u|_{\Gamma_h} = 0 \end{cases}$$

на сетке  $(x_m, y_n) \in D_h^0$ ,  $x_m = mh$ ,  $y_n = nl$ , где  $D_h^0$ ,  $\Gamma_h$  – внутренняя сеточная область и сеточная граница соответственно.

3. Необходимо найти приближенное значение  $u(0,4; 0,2)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \\ u(x, 0) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \end{cases}$$

с помощью явной двухслойной разностной схемы на сетке

$$\{x_m = mh, \quad t_n = n\tau, \quad m = 0, \overline{1}, \overline{2}, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N\}$$

Выберите шаги  $h$ ,  $\tau$  и укажите последовательные вычисления, необходимые для приближенного вычисления  $u(0,4; 0,2)$ .

4. Какую задачу и с каким порядком аппроксимирует на сетке

$$\{x_m = mh, \quad y_n = nl, \quad m = 0, \overline{1}, \overline{2}, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N\}$$

разностная схема

$$\begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} = \frac{e^{x_{m+1}} + e^{x_{m-1}}}{2} + y_n, \\ u_m^0 = x_m^2 + 1, \quad \frac{u_m^1 - u_m^0}{h} = 2x_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} ?$$

Привести соответствующий этой разностной схеме шаблон. Сходится ли решение этой разностной схемы к решению соответствующей задачи, если  $l > h$ ? Почему?

## 2 ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую на сетке

$$\{x_m = mh, \quad y_n = nl, \quad m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}\} \text{ задачу:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y^2 + 1, \quad (x, y) \in D = \{0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\},$$

$$u|_{\Gamma} = xy, \quad (x, y) \in \Gamma, \text{ где } \Gamma \text{ – граница области.}$$

Какими методами можно найти решение полученной разностной схемы?

2. Определить порядок аппроксимации относительно  $h$  задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{xt},$$

$$u(x, 0) = x + 1$$

разностной схемой

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{e^{x_{m+1}, t_n} + e^{x_{m-1}, t_n}}{2}, \quad m=0, \pm 1, \dots \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$u_m^0 = x_m + 1, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, K$$

на сетке  $\{x_m = mh, t_n = n\tau, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots\}$ , если  $\tau \leq h^2$ .

3. Требуется найти приближенное значение  $u(0,3; 0,1)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{1+x^2+t^2}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.4, \\ u(x, 0) = x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq 0.4, \quad u(1, t) = t, \quad 0 \leq t \leq 0.4 \end{cases} .$$

с помощью явной двухслойной разностной схемы на сетке

$$\{x_m = mh, t_n = n\tau, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, K, \quad n=0, 1, 2, K\}$$

Выберите шаги  $h$ ,  $\tau$  и укажите последовательные вычисления, необходимые для приближенного вычисления  $u(0,3; 0,1)$ .

4. Какую задачу и с каким порядком аппроксимирует на сетке

$$\{x_m = mh, y_n = nl, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, K, \quad n=0, 1, 2, K\}$$

разностная схема

$$\begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} = \int_0^{x_m+y_n} e^{t^2} dt, \\ u_m^0 = e^{-x_m}, \quad \frac{u_m^1 - u_m^0}{h} = -e^{-x_m}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, K, \quad n=0, 1, 2, K \end{cases} ?$$

Привести соответствующий этой разностной схеме шаблон. Сходится ли решение этой разностной схемы к решению соответствующей задачи, если  $l > h$ ? Почему?

### 3. ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin(\pi xy), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = 1 + x, \quad u(0, y) = y, \quad u(1, y) = 1 + y$$

Какими методами можно найти решение полученной разностной схемы?

2. Определить порядок аппроксимации относительно  $h$  смешанной граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} e^{-xt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin xt, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.2.$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = t + 1$$

разностной схемой

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{2} e^{-x_m t_n} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{\sin(x_{m+1} t_n) + \sin(x_{m-1} t_n)}{2}, \quad m = \overline{1, M-1}; n = \overline{1, N-1} \\ u_m^0 = 0, \quad m = \overline{0, M}, \\ u_0^n = t_n, \quad u_M^n = t_n + 1, \quad n = \overline{0, N} \end{array} \right.$$

на сетке  $\{x_m = mh, t_n = n\tau, m = \overline{0, M, K}, n = \overline{0, N}\}$ , если  $\tau \leq \frac{h^2}{\max e^{-xt}}$ .

3. Требуется найти приближенное значение  $u(0,4; 0,2)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2 + t^2 + 1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \frac{x}{x+1}.$$

с помощью явной двухслойной разностной схемы на сетке

$$\{x_m = mh, t_n = n\tau, m = 0, \pm 1, \pm 2, K, n = 0, 1, 2, K\}.$$

Выберите шаги  $h$ ,  $\tau$  и укажите последовательные вычисления, необходимые для приближенного вычисления  $u(0,4; 0,2)$ .

4. Какую задачу и с каким порядком аппроксимирует на сетке

$$\{x_m = mh, y_n = nl, m = 0, \pm 1, \pm 2, K, n = 0, 1, 2, K\}$$

разностная схема

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} = \sin\left(\int_0^{x_m y_n} \frac{e^t}{1+t} dt\right), \\ u_m^0 = x_m, \quad \frac{u_m^1 - u_m^0}{h} = 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, K, \quad n = 0, 1, 2, K \end{array} \right. ?$$

Привести соответствующий этой разностной схеме шаблон. Сходится ли решение этой разностной схемы к решению соответствующей задачи, если  $l > h$ ? Почему?

#### 4. ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - (x+t)u + 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 2, \quad u(x, 0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

на сетке  $\{x_m = mh, t_n = n\tau, m = 0, \pm 1, \pm 2, K, n = 0, 1, 2, K\}$  со вторым порядком относительно  $h$ , если  $\tau \leq \gamma h^2$ , где  $\gamma$  – некоторая положительная константа.

2. Определить порядок аппроксимации задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - e^{x+t} u, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2$$

разностной схемой

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - e^{x_m+t_n} \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}, & m=0, \pm 1, \dots, n=1, 2, \dots \\ u_m^0 = x_m^2, & m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

на сетке  $\{x_m = mh, t_n = n\tau, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots\}$ , если  $\tau \leq \alpha_0 h^2$ ,  $\alpha_0 \equiv \text{const} > 0$ .

3. Требуется найти приближенное значение  $u(0,5; 0,1)$ , где  $u(x,t)$  - решение задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{xt} u + 1, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0.$$

с помощью явной двухслойной разностной схемы на сетке

$$\{x_m = mh, t_n = n\tau, m=0, \pm 1, \pm 2, K, n=0, 1, 2, K\}.$$

Выберите шаги  $h$ ,  $\tau$  и укажите последовательные вычисления, необходимые для приближенного вычисления  $u(0,5; 0,1)$ .

4. Какую задачу и с каким порядком аппроксимирует на сетке

$$\{x_m = mh, y_n = nl, m=0, \pm 1, \pm 2, K, n=0, 1, 2, K\}$$

разностная схема

$$\begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} = \frac{x_{m+1}y_{n+1} + x_{m-1}y_{n-1}}{2}, & ? \\ u_m^0 = \int_0^{x_m} e^{t^2} dt, \quad \frac{u_m^1 - u_m^0}{h} = e^{x_m^2}, & m=0, \pm 1, \pm 2, K, n=0, 1, 2, K \end{cases}$$

Привести соответствующий этой разностной схеме шаблон. Сходится ли решение этой разностной схемы к решению соответствующей задачи, если  $l > h$ ? Почему?

### Вопросы к зачету:

1. Краевая задача для разностного уравнения второго порядка.
2. Определение хорошей обусловленности, достаточный признак хорошей обусловленности.
3. Критерий хорошей обусловленности.
4. Основные понятия теории разностных схем: узел, сетка, аппроксимация, устойчивость, сходимость, порядок аппроксимации, порядок сходимости.
5. Основная теорема о сходимости.
6. Достаточный признак устойчивости разностных схем решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
7. Необходимый спектральный признак устойчивости.
8. Метод стрельбы.
9. Метод прогонки.
10. Метод прогонки.

7.2 Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

- **оценка «зачтено»** выставляется магистранту, который успешно защитил не менее 2/3 отчетов по лабораторным работам, прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров;
- **оценка «не зачтено»** выставляется магистранту, который не представил к защите 2/3 и более отчетов по лабораторным работам и не справляется с 50% вопросов и в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.

Конечный результат складывается как средневзвешенная оценка текущего и промежуточного контролей соответственно с весами 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 40 баллов;
- самостоятельная работа – 60 баллов;

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- защита лабораторных работ –100 баллов;

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

**а) основная литература**

- [1]. Кудашов В.Н. Линейные разностные уравнения [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / В.Н. Кудашов. — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Университет ИТМО, Институт холода и биотехнологий, 2015. — 37 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/67252.html>
- [2]. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
- [3]. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, 656 с.

**б) дополнительная литература**

- [1]. Вержбицкий В.М. Вычислительная математика. М. : Высш. шк, 2002, 840 с.
- [2]. Рихтмайер К., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972, 416 с.
- [3]. Алишаев М.Г., Хазамов Г.О. Введение в разностные схемы. Учебное пособие. Махачкала, 1991, 85 с.

## **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Федеральный портал российское образование <http://edu.ru>;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета <http://elib.dgu.ru/?q=node/256>;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://catalog.iot.ru/index.php>;
4. Электронная библиотека <http://elib.kuzstu.ru>.

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Для успешного освоения курса студентам рекомендуется самостоятельно повторять материал, пройденный во время лекций с подробным разбором доказательств теорем. Рекомендуется самостоятельно изучать по рекомендованной литературе программный материал и научиться применять на практике изученный материал, составлять алгоритмы решения задач и по ним составлять программы для решения этих задач на компьютере, изучать кроме рекомендованной и научную литературу, также пользоваться интернет - ресурсами. Рекомендуется научиться работать с прикладными программами.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: различные пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.), а также интернет-ресурсы.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Все лекционные аудитории укомплектованы мультимедийными и техническими средствами обучения. В каждой аудитории 35 рабочих мест. Аудитории, в которых проводятся семинарские занятия, оснащены доской, укомплектованы рабочими местами в расчете на 25-30 студентов. На факультете имеются 4 компьютерных класса с современными персональными компьютерами и лицензионным программным обеспечением, на базе кафедры прикладной математики создана студенческая научно – исследовательская лаборатория «Математическое моделирование». На кафедре прикладной математики и в библиотеке ДГУ имеются методические указания к выполнению лабораторных работ, также в библиотеке ДГУ имеется соответствующая литература, кроме того методические разработки, размещены на сайте ДГУ.