



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**Методы решения больших систем линейных
алгебраических уравнений**

Кафедра прикладной математики факультета математики
и компьютерных наук

Образовательная программа
01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Уровень высшего образования
Магистратура

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую
участниками образовательных отношений

Махачкала 2021

Рабочая программа дисциплины «Методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений» составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика (уровень магистратура) от «_10_» ____ 01 ____ 2018 г. № 13.

Разработчик:

1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент Абдурагимов Г.Э.;

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от «_22_» _06_ 2021г., протокол №_10_

Зав. кафедрой Кадиев Р.И. Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «_23_» ____ 06 ____ 2021 г., протокол №_6_.

Председатель Бейбалаев В.Д. Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «_9_» ____ 07 ____ 2021 г. _____

(подпись)

Начальник УМУ Гасангаджиева А.Г. Гасангаджиева А.Г.

(подпись)

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений» входит часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений образовательной программы *магистратуры* по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика и является дисциплиной по выбору.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с различными методами решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, усвоением наиболее распространенных из них численных методов решения СЛАУ, а также знакомством с современными направлениями развития эффективных методов решения СЛАУ.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных - ОПК-3, профессиональных – ПК-1 и ПК-4.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме устного опроса, зачета по лабораторным работам и промежуточный контроль в форме зачета.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семес тр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет по лаб. работам, контрольная работа, экзамен)
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лек ции	Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции				
1	108	14	16				78	зачет

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Методы решения больших СЛАУ» являются: усвоение различных методов решения СЛАУ большой размерности, научить самостоятельно решать СЛАУ большой размерности, пользуясь ЭВМ; привить обучающимся умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по математике, развить у них математический стиль мышления. Конечная цель изучения этой дисциплины — стать специалистом по решению СЛАУ большой размерности.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина «Методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений» входит часть ОПОП, формируемую участниками образовательных отношений образовательной программы *магистратуры* по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика и относится в соответствии с графиком учебного процесса к 1 семестру. Предполагает знание основ теории линейной алгебры, знание численных методов решения СЛАУ и умение применять их для нахождения решений задач линейной алгебры, умение пользоваться различными пакетами прикладных программ для этой цели. Магистрант, изучив эту дисциплину, должен научиться составлять алгоритмы решения СЛАУ большой размерности, пользуясь изученными методами, и реализовать их на ЭВМ. При составлении математических моделей различных экономических и физических задач могут возникать СЛАУ большой размерности. Поэтому умение решать СЛАУ большой размерности полезно магистранту как специалисту по направлению математическое моделирование вычислительная математика.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения)

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Знает принципы построения математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности ОПК-3.2 Умеет применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности ОПК-3.3 Имеет практический опыт составления математических моделей	Знает: основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами Умеет: составлять алгоритмы и соответствующие программы для решения на компьютере СЛАУ с разреженными матрицами Владеет: практическими навыками решения СЛАУ с разреженными матрицами	Конспектирование и изучение лекционного материала, опрос, выполнение лабораторных работ, самостоятельная подготовка.

	для решения задач в области профессиональной деятельности		
<p>ПК-1 Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</p>	<p>ПК-1.1 Обладает умением сбора и обработки данных, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</p> <p>ПК-1.2 Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в математике и информатике</p> <p>ПК-1.3 Имеет практический опыт использования методов современных научных исследований</p>	<p>Знает: основные способы сбора и обработки матричных данных</p> <p>Умеет: формулировать и решать СЛАУ с разреженными матрицами</p> <p>Владеет: практическими навыками и приемами решения СЛАУ с разреженными матрицами</p>	
<p>ПК-4 Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности</p>	<p>ПК-4.1 Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции)</p> <p>ПК-4.2 Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта</p> <p>ПК-4.3 Имеет практический опыт применения указанных выше методов и технологий</p>	<p>Знает: основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами</p> <p>Умеет: применять языки программирования и пакеты прикладных программ к решению СЛАУ с разреженными матрицами</p> <p>Владеет: практическими навыками и приемами применения указанных выше методов и технологий</p>	<p>Конспектирование и изучение лекционного материала, опрос, выполнение лабораторных работ, самостоятельная подготовка.</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

4.2. Структура и содержание дисциплины (модули)

№ п/п	Раздел и темы дисциплины по модулям	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации
			Лекции	Практика	Лабор.	Самостоятельная работа в т.ч. экзамен	
Модуль 1. Неитерационные методы решения больших разреженных СЛАУ							
1	Хранение и обработка разреженных матриц	1	4			10	Опрос, лабораторная работа
2	Решение больших разреженных СЛАУ методами LU-факторизации		2		4	16	
Всего по модулю 1			6		4	26	Защита лабораторных заданий
Модуль 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом ILU-факторизации							
1	Решение больших разреженных СЛАУ методом ILU-факторизации	1	4		4	28	Опрос, лабораторная работа
Всего по модулю 2			4		4	28	Защита лабораторных заданий
Модуль 3. Итерационные методы решения больших разреженных СЛАУ							
1	Классические итерационные методы и релаксация	1	4		8	8	Опрос, лабораторная работа
Всего по модулю 3			4		8	24	Защита лабораторных заданий
ИТОГО ЗА 1 СЕМЕСТР			14		16	78	Зачет
ИТОГО:			14		16	78	108

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Модуль 1. Неитерационные методы решения больших разреженных СЛАУ

Тема 1. Хранение и обработка разреженных матриц.

Портрет разреженной матрицы, виды портретов. Способы хранения разреженных матриц.

Умножение разреженной матрицы на вектор.

Тема 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом LU-факторизации.

Разложение матрицы с помощью LU-факторизации. Решение большой системы линейных алгебраических уравнений с разреженной нижней треугольной матрицей. Решение большой системы линейных алгебраических уравнений с разреженной верхней треугольной матрицей. Недостатки метода LU-факторизации. Решение СЛАУ с разреженной матрицей с помощью метода LU факторизации.

Модуль 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом ILU- факторизации

Тема 1. Решение больших разреженных СЛАУ методом I LU-факторизации.

Разложение матрицы с помощью ILU-факторизации. Свойства ILU-факторизации. Решение СЛАУ с разреженной матрицей с помощью метода ILU-факторизации. Преимущество метода ILU-факторизации перед методом LU-факторизации.

Модуль 3. Итерационные методы решения больших разреженных СЛАУ

Тема 1. Классические итерационные методы и релаксация.

Классические итерационные методы и релаксация. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя, их сходимость. Релаксационные методы, ускорение их сходимости.

4.3.2. Содержание лабораторных занятий по дисциплине

№ п/п	Тема	Аудиторные часы
	<i>Модуль 1. Лабораторные занятия по теме: Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами методом LU-факторизации</i>	4
1.1 лб	LU-факторизация, формулы, алгоритм.	2
1.2 лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами методом LU-факторизации.	2
	<i>Модуль 1. Лабораторные занятия по теме: Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами методом ILU-факторизации</i>	4
2.1 лб	ILU-факторизация, формулы, алгоритм.	2
2.2 лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами на компьютере методом ILU –факторизации.	2
	<i>Модуль 3. Лабораторные занятия по теме: Итерационные методы и метод релаксации решения больших СЛАУ.</i>	8
3.1 лб	Метод простой итерации решения разреженных СЛАУ	2
3.2 лб	Метод Гаусса-Зейделя, формулы, алгоритм.	2
3.3 лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами на компьютере итерационными методами.	4

5. Образовательные технологии

Для проведения лабораторных занятий на факультете имеются 4 компьютерных класса, оснащенные современными компьютерами с необходимым программным обеспечением. Магистранты имеют свободный доступ к интернет-ресурсам. Университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

6.1. Виды и порядок выполнения самостоятельной работы

1. Изучение рекомендованной литературы.
2. Решение задач домашней самостоятельной работы.
3. Выполнение лабораторных работ.

№	Виды самостоятельной работы	Вид контроля	Учебно-методич. обеспечения
1	Изучение рекомендованной литературы	Устный опрос по разделам дисциплины	См. разделы 8, 9 данного документа
2	Решение задач домашней самостоятельной работы	Оценка выполненной работы	См. разделы 8, 9 данного документа
3	Выполнение лабораторных работ	Зачет по лабораторной работе	См. разделы, 8, 9 данного документа

6.2 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

ПЕРЕЧЕНЬ ПРИМЕРНЫХ ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Даны разреженные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \\ -1 & 0 & 9 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

Вариант 1

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 1 & 0 & 10 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 12 & 0 & 0 & 0 & 14 & 7 \\ 3 & 0 & 12 & 8 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 13 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- 1) Выписать портреты этих матриц .
- 2) Симметричны ли их портреты?
- 3) Выписать для хранения этих матриц способом CSR массивы *aelem*, *jpnr*, *iptr*.
- 4) Выписать для хранения этих матриц способом CSR с изменениями массивы *adiag*, *altr*, *autr*, *jpnr*, *iptr*.

II. Написать алгоритм и соответствующую программу умножения матриц A и B на векторы x и y соответственно. Результаты проверить на векторах

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- III.** 1) Найти разложение матрицы A методом LU – факторизации.
 2) Найти разложение матрицы A методом ILU – факторизации.
 3) Описать недостатки и достоинства методов LU и ILU - факторизаций.
 4) Решить методом ILU – факторизации систему $Ax = b^T$, где

Вариант 1: $b = (6, -3, -5, 28, -6, -11, 20)$.

Вариант 2: $b = (7, -2, -3, 31, -8, -14, 23)$.

Вариант 3: $b = (9, 0, -1, 25, -12, -20, 31)$.

Литература для выполнения самостоятельной работы: рекомендованная к данному курсу основная [2] и дополнительная литература [6], конспекты лекций.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Типовые контрольные задания и контрольные вопросы

Типовая контрольная работа

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \\ -1 & 0 & 9 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- 1) Найти разложение матрицы A методом LU –факторизации.
- 2) Найти разложение матрицы A методом ILU –факторизации.
- 3) Решить методом ILU –факторизации систему $Ax = b^T$, где $b = (6, -3, -5, 28, -6, -11, 20)$.

Примерные вопросы к зачету

Примерные вопросы по модулю 1

1. Что называется портретом разреженной матрицы?
2. Деление матриц по соответствующим портретам.
3. Распространенный способ хранения несимметричных матриц, продемонстрировать на примере.
4. Хранение матрицы с симметричным портретом и ненулевой главной диагональю, продемонстрировать на примере.
5. Алгоритм матрично-векторного умножения.
6. Симметричность портрета при учете краевых условий.
7. Прямой и обратный ход по разреженным треугольным матрицам.

Примерные вопросы по модулю 2

1. Что такое LU-факторизация? Объяснить почему невыгодно применять LU-факторизацию к большим разреженным матрицам.
2. Что такое ILU-факторизация? Алгоритм ILU-факторизации.
3. Продемонстрировать на примере реализацию алгоритма ILU-факторизации.

4. LU-факторизация в случае симметричной матрицы, алгоритм, демонстрация на примере.
5. Программа реализации на ЭВМ LU-факторизации.

Примерные вопросы по модулю 3

1. Итерационный метод Якоби решения СЛАУ, алгоритм метода.
 2. Метод, основанный на расщеплении матрицы, алгоритм метода.
 3. Теорема о сходимости метода, основанного на расщеплении матрицы.
 4. Метод последовательной верхней релаксации, алгоритм метода.
 5. Сравнение методов Якоби и Гаусса-Зейделя с методом последовательной верхней релаксации
- 7.2. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

- **оценка «зачтено»** выставляется магистранту, который успешно защитил не менее 2/3 отчетов по лабораторным работам, прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров;
- **оценка «не зачтено»** выставляется магистранту, который не представил к защите 2/3 и более отчетов по лабораторным работам и не справляется с 50% вопросов и в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.

Конечный результат складывается как средневзвешенная оценка текущего и промежуточного контролей соответственно с весами 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 40 баллов;
- самостоятельная работа – 60 баллов;

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- защита лабораторных работ –100 баллов;

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

[1]. Веретенников В.Н. Методические указания. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Индивидуальное домашнее задание [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Н. Веретенников. — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Российский государственный гидрометеорологический университет, 2004. — 25 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12499.html>

[2]. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000, 70 с.

[3]. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М: Физматгиз, 1975, 228 с.

б) дополнительная литература

[1]. Аббафи Й., Спедикато Э. Математические методы для линейных и нелинейных уравнений: проекционные ABS алгоритмы. М.: Мир, 1996, 268 с.

[2]. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999, 548 с.

[3]. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988, 410 с.

[4]. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing Company, 2003, 528 с.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Федеральный портал российское образование <http://edu.ru>;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета <http://elib.dgu.ru/?q=node/256>;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://catalog.iot.ru/index.php>;
4. Электронная библиотека <http://elib.kuzstu.ru>.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для успешного освоения курса магистрантам рекомендуется самостоятельно повторять материал, пройденный во время лекций с подробным разбором доказательств теорем. Рекомендуется самостоятельно изучать по рекомендованной литературе программный материал и научиться применять на практике изученный материал, составлять алгоритмы решения задач и по ним составлять программы для решения этих задач на компьютере, изучать кроме рекомендованной и научную литературу, также пользоваться интернет - ресурсами. Рекомендуется научиться работать с прикладными программами.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: различные пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.), а также интернет-ресурсы.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Все лекционные аудитории укомплектованы мультимедийными и техническими средствами обучения. В каждой аудитории 35 рабочих мест. Аудитории, в которых проводятся семинарские занятия, оснащены доской, укомплектованы рабочими местами в расчете на 25-30 студентов. На факультете имеются 4 компьютерных класса с современными персональными компьютерами и лицензионным программным обеспечением, на базе кафедры прикладной математики создана студенческая научно – исследовательская лаборатория «Математическое моделирование». На кафедре прикладной математики и в библиотеке ДГУ имеются методические указания к выполнению лабораторных работ, также в библиотеке ДГУ имеется соответствующая литература, кроме того методические разработки, размещены на сайте ДГУ.