МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Кафедра: *дифференциальных уравнений и функционального анализа* **Факультет:** *математики и компьютерных наук*

Образовательная программа

01.03.01 Математика

Профили подготовки

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения:

Очная, заочная

Статус дисциплины: базовая

Махачкала 2018

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки

01.03.01 Математика (уровень бакалавриата) от
07 августа 2014 г. № 943

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,
Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2018 г., протокол № 10

Зав. кафедрой ____ Сиражудинов М.М.
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2018г., протокол № 6.

Председатель ____ Бейбалаев В.Д.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением

«_29_» июня 2018г. ____ Гасангаджиева А.Г.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в базовую часть образовательной программы бакалавриата по направлению **01.03.01 Математика.**

Дисциплина реализуется на *факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.*

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с банаховыми и гильбертовыми пространствами, операторами, действующими в них; изучение и освоение таких базовых понятий как полнота и сепарабельность метрических и линейно нормированных пространств, компактность множеств, ряды Фурье в гильбертовых пространствах; изучение фундаментальных свойств линейных операторов; построение и основные свойства меры и интеграла Лебега; свойства классических функциональных пространств.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: *общепрофессиональных компетенций (ОПК): ОПК-1, ОПК-3; профессиональных (ПК): ПК-3, ПК-4, ПК-11*

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена*.

Объем дисциплины 8 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

<table>
<tr><th rowspan="5">Семестр</th><th colspan="7">Учебные занятия по очной форме обучения</th><th rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Всего</th><th colspan="6">в том числе</th></tr>
<tr><th colspan="5">Контактная работа обучающихся с преподавателем</th><th rowspan="3">СРС, в том числе экзамен</th></tr>
<tr><th colspan="5">из них</th></tr>
<tr><th>Лекции</th><th>Лабораторные занятия</th><th>Практические занятия</th><th>КСР</th><th>консультации</th></tr>
<tr><td>5</td><td>144</td><td>36</td><td></td><td>36</td><td></td><td></td><td>72</td><td>Экзамен</td></tr>
<tr><td>6</td><td>144</td><td>36</td><td></td><td>36</td><td></td><td></td><td>72</td><td>Экзамен</td></tr>
<tr><td>Итого</td><td>288</td><td>72</td><td></td><td>72</td><td></td><td></td><td>144</td><td></td></tr>
</table>

Семестр	Учебные занятия по заочной форме обучения							Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС, в том числе экзамен	
		из них						
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации		
5	144	8		6			130	Экзамен
6	144	8		6			130	Экзамен
Итого	288	16		12			260	

1. Цели освоения дисциплины Целью освоения дисциплины *функциональный анализ* являются:

– овладение основными понятиями функционального анализа (полнота, сепарабельность, компактность, линейно нормированные и гильбертовы пространства, линейные операторы);
– овладение тремя основными принципами линейного функционального анализа (теорема о продолжении линейного функционала, теорема о равномерной ограниченности, теорема о открытом отображении);
– овладение основными понятиями и методами теории меры и интеграла Лебега; – овладение основными методами функционального анализа и умения применять их при решении различных задач из других разделов математики и естествознания;
– дальнейшее повышение математической культуры студентов.

2.Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *функциональный анализ* входит в базовую часть образовательной программы по направлению *01.03.01 Математика*.

Знания по функциональному анализу студентам необходимы при изучении таких последующих университетских курсов, как дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, уравнения в частных производных, теория вероятностей, численные методы, методы оптимизации.

Функциональный анализ рассчитан на студентов третьего курса. Предполагается, что за первые два года студент уже должен Знает:

1) линейную алгебру;
2) основы действительного анализа;
3) элементы теории метрических пространств, которые обычно сообщаются в курсе математического анализа;

4) топологию;
5) обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для ФАН настоящая потребность в комплексном анализе появляется в середине курса, при изучении спектров. Особа связь между ФАН и УЧП, если пользоваться ФАН при изложении УЧП.

Тем не менее, изложение некоторых вопросов функционального анализа должно предшествовать независимое и замкнутое изложение соответствующих связей из других дисциплин (скажем из топологии и алгебры) так как это нужно для функционального анализа.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	**Знает:** место функционального анализа внутри математики и возможностей функционально аналитического подхода при решении различных задач теории дифференциальных и интегральных уравнений **Умеет:** формулировать задачи дифференциальных и интегральных уравнений на языке функционального анализа **Владеет:** основными методами функционального анализа
ОПК-3	Обладать способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	**Знает:** основные понятия и теоремы функционального анализа **Умеет:** видеть связь идей и методов функционального анализа с другими разделами математики **Владеет:** методами функционального анализа для самостоятельного применения их при научноисследовательской работе

ПК-3	способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	**Знает:** основные принципы функционального анализа, основные конструкции и методы функционального анализа, основные свойства конкретных банаховых и гильбертовых пространств, операторов и функционалов, действующих в них **Умеет:** применять основные принципы и методы функционального анализа при доказательстве различных утверждений **Владеет:** доказательствами основных теорем функционального анализа; методами функционального анализа для доказательства утверждений
ПК-4	способностью публично представлять собственные и известные научные результаты	**Знает:** основные свойства банаховых и гильбертовых пространств, ограниченных линейных операторов, компактных линейных операторов, самосопряженных операторов. **Умеет:** четко формулировать условия применимости различных теорем функционального анализа **Владеет:** навыками дискуссии, способностью публично представлять собственные и известные научные результаты
ПК-11	способностью к проведению методических и экспертных работ в области математики	**Знает:** основные приемы функционально аналитического подхода к решению прикладных задач **Умеет:** устанавливать полноту или неполноту, сепарабельность или несепарабельность, компактность или некомпактность метрических пространств; устанавливать свойства данных линейных или нелинейных операторов **Владеет:** основными методами функционального анализа для проведения методического и экспертного анализа поставленной задачи

4. Объем, структура и содержание дисциплины. 4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 8, академических часов 288.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	**Семестр**	**Неделя семестра**	**Аудиторные занятия по очной форме обучения, в том числе**				**Самостоят. работа**	**Формы текущего контроля успеваемости** ***(по неделям семестра)*** **Форма промежуточной аттестации** ***(по семестрам)***
			лекции	**практ. занятия**	**лабор. работы**	**Контр. сам. раб.**		
Первый семестр								
Модуль 1. Интеграл Лебега								
Всего по модулю 1	**5**		***12***	***12***			***12***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Мера Лебега и его свойства			2	2			2	
2. Измеримые множества и функции			4	4			4	
3. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере			4	4			4	
4. Теорема Фубини о повторном интеграле			2	2			2	
Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах								
Всего по модулю 2	**5**		***12***	***12***			***12***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Метрические пространства			4	4			4	
2. Теорема Хана-Банаха о и отображение двойственности			4	4			4	
3. Лебеговы пространства и им сопряженные.			4	4			4	
Сопряженные операторы								
Модуль 3. ***Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье***								
Всего по модулю 3	**5**		***12***	***12***			***12***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства			2	2			2	
2. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства			2	2			2	

3. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве			2	2			2	
4. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм гильбертовых пространств			2	2			2	
5. Преобразование Фурье и теорема Планшереля			4	4			4	
Модуль 4. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 5 семестр	**144**		**36**	**36**			**72**	
Второй семестр								
Модуль 1. Пространства сходимости. Обобщенные функции								
Всего по модулю 1	***6***		***6***	***6***			***24***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Линейные пространства сходимости и им сопряженные			2	2			8	
2. Обобщенные функции			2	2			8	
3. Локально выпуклые пространства			2	2			8	
Модуль 2. Ограниченные операторы. Компактные множества								
Всего по модулю 2	***6***		***16***	***16***			***4***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности			4	4				
2. Сильная и слабая сходимость.			2	2			1	
3. Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр ограниченного оператора			2	2			1	
4. Компактные множества. Критериий компактности Хаусдорфа и ее следствия.			4	4			1	
5. Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p			2	2			1	
6. Слабо компактные			2	2				
множества и их свойства								
Модуль 3. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами								
Всего по модулю 3	***6***		***14***	***14***			***8***	Контрольная работа, коллоквиум

1. Компактные операторы и их свойства.			2	2			2	
2.Теорема РиссаШаудера о спектре вполне непрерывного оператора.			2	2			2	
3.Линейные операторные уравнения в (В)пространстве с вполне непрерывными операторами.			4	4			2	
4.Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта. Штурма-Лиувилля			4	4			1	
5.Интегральные операторы Фредгольма и задача			2	2			1	
Модуль 4. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 6 семестр	**144**		**36**	**36**			**36**	
ИТОГО	**288**		**72**	**72**			**72**	

Названия разделов и тем дисциплины	**Семестр**	**Неделя семестра**	**Аудиторные занятия по заочной форме обучения, в том числе**				**Самостоят· работа**	**Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)***
			лекции	**практ. занятия**	**лабор. работы**	**Контр. сам. раб.**		
Первый семестр								
Модуль 1. Интеграл Лебега								
Всего по модулю 1	***5***		***2***	***2***			***32***	Контрольная работа, коллоквиум
1. Мера Лебега и его свойства			1	1			16	
2. Измеримые множества и функции			1	1			16	
Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах								
Всего по модулю 2	***5***		***2***	***2***			***32***	Контрольная работа, коллоквиум
3. Метрические пространства			1	1			16	
4.Сопряженные операторы			1	1			16	

Модуль 3. ***Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье***								
Всего по модулю 3	***5***		***4***	***2***			***30***	Контрольная работа, коллоквиум
5. Предгильбертовы и гильбертовы пространства			2	2			15	
6. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства			2				15	
Модуль 4. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 5 семестр	**144**		**8**	**6**			**130**	
Второй семестр								
Модуль 1. Пространства сходимости. Обобщенные функции								
Всего по модулю 1	***6***		***2***	***3***			***31***	Контрольная работа, коллоквиум
7. Линейные пространства сходимости и им сопряженные			1	2			16	
8. Обобщенные функции			1	1			15	
Модуль 2. Ограниченные операторы. Компактные множества								
Всего по модулю 2	***6***		***2***	***2***			***32***	Контрольная работа, коллоквиум
9. Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности			1	1			16	
10. Сильная и слабая сходимость.			1	1			16	
Модуль 3. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами								
Всего по модулю 3	***6***		***4***	***1***			***31***	Контрольная работа, коллоквиум
11. Компактные операторы и их свойства.			2	1			16	
12.Теорема РиссаШаудера о спектре вполне непрерывного оператора.			2				15	
Модуль 4. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 6 семестр	**144**		**8**	**6**			**130**	
ИТОГО	**288**		**16**	**12**			**260**	

4.3. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)**

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Первый семестр Модуль 1.

Интеграл Лебега

Тема 1: «Мера Лебега и его свойства»

Лекция №1:

1) Основные классы подмножеств данного множества
2) Конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множества меры 3) Продолжение меры на кольцо.
4) Внешняя мера, μ-измеримые множества и теорема Каратеодори об μ-измеримых множествах.
5) Продолжение меры по Лебегу и Жордану.

Тема 2: «Измеримые множества и функции»

Лекция №2:

1) Измеримые множества и их свойства.
2) Борелевские множества.
3) Множества меры нуль.

Лекция №3:

1) Измеримые функции и их свойства.
2) Различные типы сходимости функций и связь между ними
3) Теоремы Егорова и Лузина.

Тема 3: «Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере»

Лекция №4:

1) Интеграл по счетно-аддитивной мере.
2) Счетная аддитивность интеграла Лебега.
3) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Лекция №5:

1) Теорема о монотонной сходимости.
2) Лемма Фату.
3) Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Тема 4: «Теорема Фубини о повторном интеграле» *Лекция №6:*

1) Произведение мер.
2) Теорема Фубини.
3) Теорема Тонелли.

Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах

Тема 1: «Метрические пространства» *Лекция № 7:*

1) Метрические пространства.
2) Примеры метрических пространств.
3) Сходимость в метрическом пространстве.
4) Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве и их свойства.
5) Всюду и нигде не плотные множества.

Лекция № 8:

1) Фундаментальные последовательности.
2) Полные метрические пространства.
3) Теорема о пополнении метрических пространствах.
4) Теорема о вложенных шарах.
5) Неподвижные точки отображений.
6) Сжимающие отображения.
7) Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
8) Приложения теоремы Банаха о сжимающих отображениях.

Тема 2: «Теорема Хана-Банаха и отображение двойственности» *Лекция № 9:*

1) Полунорма и норма в линейном пространстве.
2) Линейно нормированные и банаховы пространства.
3) Примеры линейно нормированных и банаховых пространств.
4) Линейные операторы и их непрерывность.

Лекция № 10:

1) Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по Непрерывности в (В) - пространствах
2) Теорема Хана-Банаха о продолжении.
3) Сопряженное пространство.

Тема 2: «Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы» *Лекция № 11:*

1) Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^{*}$.
2) Биортогональные системы.
3) Отображения двойственности и рефлексивные пространства.

Лекция № 12:

1) Неравенства Гельдера и Минковского для рядов и интегралов
2) Лебеговы пространства $L_p(X)$ $(1\le p \le \infty)$.
3) Сопряженное пространство $Lp^*(X)$ $(1\le p \le \infty)$.

4) Сопряженные линейные операторы

Модуль 3. Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье

Тема 1: «Предгильбертовы и гильбертовы пространства»

Лекция № 13:

1) Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
2) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
3) Неравенства Коши-Буняковского.
4) Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.

Тема 2: «Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства»

Лекция № 14:

1) Ортогональность в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональное дополнение.
3) Теорема об ортогональном разложении.

Тема 3: «Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».

Лекция № 15:

1) Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте

Тема 4: «Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм в гильбертовых пространствах» *Лекция № 16:*

1) Ортогональные системы.
2) Неравенства Бесселя и теорема Пифагора.
3) Условие замкнутости. 4) Теорема Стеклова о полноте 5) Изоморфизм и изометрия.
6) Теорема Рисса-Фишера об изометричном изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
7) Изоморфизм гильбертовых пространств. Условие замкнутости

Тема 5: «Преобразование Фурье и теорема Планшереля»

Лекция № 17:

1) Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$.
2) Свойства преобразования Фурье.
3) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$. *Лекция №18:*

1) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$.
2) Основные свойства преобразования Фурье в $L_2(R^n)$.

3) Теорема順 Планшереля об операторе Фурье.
4) Приложение преобразования Фурье при решении дифференциальных уравнений.

Второй семестр

Модуль 1. Пространства сходимости. Обобщенные функции

Тема 1: «Линейные пространства сходимости и им сопряженные»

Лекция №1:

5) Аксиомы сходимости по Френе.
6) Линейные пространства сходимости.
7) Полнота сопряженных пространств.

Тема 2: «Обобщенные функции»

Лекция №2:

1) Пространства основных функций $D(R^n)$ и обобщенный функций $D'(R^n)$.
2) Действия с обобщенными функциями *Лекция № 3:*

1) Структура обобщенных функций.
2) Сопряженное пространство $E'(R^n)$.
3) Пространства Шварца J´(Rn).

Модуль 2. Ограниченные операторы. Компактные множества

Тема 1: «Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности»

Лекция №4:

1) Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве 2) Некоторые приложения теоремы Бэра.

Лекция №5:

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Принцип равномерной ограниченности для линейных ограниченных операторов.
3) Приложения теоремы о равномерной ограниченности.
4) Слабая* сходимость функционалов.

Тема 2: «Сильная и слабая сходимость» *Лекция №6:*

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Слабая* сходимость функционалов.

Тема 3: «<u>Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр линейного оператора»</u> *Лекция №7:*

1) Теорема об обратном операторе.
2) Приложения теоремы об обратном операторе.
3) Спектр ограниченного оператора.

Тема 4: «<u>Компактные множества. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствия»</u>
Лекция №8:

1) Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве. 2) Основные свойства компактных множеств.

Лекция №9:

1) Вполне ограниченные множества.
2) Критерий компактности Хаусдорфа .
3) Следствия теоремы Хаусдорфа.

Тема 5: «<u>Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p»</u>
Лекция №10:

1) Критерий компактности множества в C(X).
2) Критерий компактности множества в пространствах l_p и $L_p(X)$ ($1\leq p \leq \infty$).

Тема 6: «<u>Слабо компактные множества и их свойства»</u>
Лекция №11:

1) Слабо* компактные множества и их свойства.
2) Критерий слабой* компактности множества K E*, где E* - сопряженное пространство (B)-пространства E.

Модуль 2. Ограниченные операторы. Компактные множества

Тема 1: «<u>Компактные операторы и их свойства»</u> *Лекция №12:*

1) Компактные операторы.
2) Основные свойства линейных компактных операторов.
3) Примеры линейных компактных операторов.

Тема 2: «<u>Теорема Рисс-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора»</u>
Лекция №13:

1) Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в
2) Следствия теоремы Рисса-Шаудера.

Тема 3: «Линейные уравнения в (B)-пространствах с вполне непрерывными операторами» *Лекция №14:*

1) Постановка задачи.
2) Нетеровы операторы.

Лекция №15:

1) Теоремы Фредгольма.
2) Примеры уравнений с вполне непрерывным оператором.

Тема 4: «Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта»

Лекция №16:

1) Эрмитовы операторы.
2) Основные свойства эрмитовых операторов.

Лекция №17:

1) Теорема Гильберта-Шмидта.
2) Операторы Гильберта-Шмидта.

Тема 4: «Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта»

Лекция №18:

1) Интегральные операторы Фредгольма
2) Задача Штурма-Лиувилля.

4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине

Первый семестр

Тема 1: «Мера Лебега и его свойства»

Практическое занятие №1:

1) Основные классы подмножеств данного множества
2) Конечно-аддитивные и счетно-аддитивные функции множества меры
3) Продолжение меры на кольцо.

Тема 2: «Измеримые множества и функции»

Практическое занятие №2:

1) Измеримые множества и их свойства.
2) Борелевские множества.
3) Множества меры нуль.

Практическое занятие №3:

1) Измеримые функции и их свойства.

2) Различные типы сходимости функций и связь между ними

Тема 3: «Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере»

Практическое занятие №4:

1) Интеграл по счетно-аддитивной мере.
2) Счетная аддитивность интеграла Лебега.
3) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Практическое занятие №5:

1) Теорема о монотонной сходимости.
2) Лемма Фату.
3) Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона-Никодима.

Тема 4: «Теорема Фубини о повторном интеграле»

Практическое занятие №6:

1) Произведение мер.
2) Теорема Фубини.
3) Теорема Тонелли.

Модуль 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах

Тема 1: «Метрические пространства» *Практическое занятие № 7:*

1) Примеры метрических пространств.
2) Сходимость в метрическом пространстве.
3) Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве и их свойства.
4) Всюду и нигде не плотные множества.

Практическое занятие № 8:

1) Фундаментальные последовательности.
2) Примеры полных метрических пространств.
3) Неподвижные точки отображений.
4) Сжимающие отображения.

Тема 2: «Теорема Хана-Банаха и отображение двойственности» *Практическое занятие № 9:*

1) Полунорма и норма в линейном пространстве.
2) Линейно нормированные и банаховы пространства.
3) Примеры линейно нормированных и банаховых пространств.
4) Линейные операторы и их непрерывность.

Практическое занятие № 10:

1) Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по Непрерывности в (B) - пространствах
2) Теорема Хана-Банаха о продолжении.
3) Сопряженное пространство.

Тема 2: «Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы»

Практическое занятие № 11:

1) Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^*$.
2) Биортогональные системы.
3) Отображения двойственности и рефлексивные пространства.

Практическое занятие № 12:

1) Неравенства Гельдера и Минковского для рядов и интегралов 2) Лебеговы пространства $L_p(X)$ ($1 \leq p \leq \infty$).
3) Сопряженное пространство $Lp^*(X)$ ($1 \leq p \leq \infty$).
4) Сопряженные линейные операторы

Модуль 3. Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье

Тема 1: «Предгильбертовы и гильбертовы пространства»

Практическое занятие № 13:

1) Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
2) Примеры предгильбертовых и гильбертовых пространств.
3) Неравенства Коши-Буняковского.
4) Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.

Тема 2: «Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства»

Практическое занятие № 14:

1) Ортогональность в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональное дополнение.
3) Теорема об ортогональном разложении.

Тема 3: «Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».

Практическое занятие № 15:

1) Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
2) Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте

Тема 4: «Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм в гильбертовых пространствах» *Практическое занятие № 16:*

1) Ортогональные системы.
2) Неравенства Бесселя и теорема Пифагора.
3) Условие замкнутости. 4) Теорема Стеклова о полноте 5) Изоморфизм и изометрия.
6) Теорема Рисса-Фишера об изометричном изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
7) Изоморфизм гильбертовых пространств. Условие замкнутости

Тема 5: «Преобразование Фурье и теорема Планшереля»

Практическое занятие № 17:

1) Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$.
2) Свойства преобразования Фурье.
3) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$. *Практическое занятие №18:*

1) Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$.
2) Основные свойства преобразования Фурье в $L_2(R^n)$.
3) Теорема Планшереля об операторе Фурье.
4) Приложение преобразования Фурье при решении дифференциальных уравнений.

Второй семестр

Модуль 1. Пространства сходимости. Обобщенные функции

Тема 1: «Линейные пространства сходимости и им сопряженные»

Практическое занятие №1:

1) Аксиомы сходимости по Френе.
2) Линейные пространства сходимости.
3) Полнота сопряженных пространств.

Тема 2: «Обобщенные функции» *Практическое занятие №2:*

1) Пространства основных функций $D(R^n)$ и обобщенный функций $D'(R^n)$.
2) Действия с обобщенными функциями

Практическое занятие № 3:

1) Структура обобщенных функций.
2) Сопряженное пространство $E'(R^n)$.
3) Пространства Шварца J´(Rn).

Модуль 2. Ограниченные операторы. Компактные множества

Тема 1: «<u>Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности»</u>

Практическое занятие №4:

1) Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве 2) Некоторые приложения теоремы Бэра.

Практическое занятие №5:

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Принцип равномерной ограниченности для линейных ограниченных операторов.
3) Приложения теоремы о равномерной ограниченности.
4) Слабая* сходимость функционалов.

Тема 2: «<u>Сильная и слабая сходимость»</u>

Практическое занятие №6:

1) Сильная и слабая сходимость операторов.
2) Слабая* сходимость функционалов.

Тема 3: «<u>Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр линейного оператора»</u>

Практическое занятие №7:

1) Теорема об обратном операторе.
2) Приложения теоремы об обратном операторе.
3) Спектр ограниченного оператора.

Тема 4: «<u>Компактные множества. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствия»</u>

Практическое занятие №8:

1) Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве.
2) Основные свойства компактных множеств.

Практическое занятие №9:

1) Вполне ограниченные множества.
2) Критерий компактности Хаусдорфа .
3) Следствия теоремы Хаусдорфа.

Тема 5: «<u>Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p»</u>

Практическое занятие №10:

1) Критерий компактности множества в C(X).
2) Критерий компактности множества в пространствах l_p и $L_p(X)$ ($1\leq p \leq \infty$).

Тема 6: «Слабо компактные множества и их свойства»

Практическое занятие №11:

1) Слабо* компактные множества и их свойства.
2) Критерий слабой* компактности множества K E*, где E* - сопряженное пространство (B)-пространства E.

Модуль 2. Ограниченные операторы. Компактные множества

Тема 1: «Компактные операторы и их свойства»

Практическое занятие №12:

1) Компактные операторы.
2) Основные свойства линейных компактных операторов.
3) Примеры линейных компактных операторов.

Тема 2: «Теорема Рисс-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора»

Практическое занятие №13:

1) Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в
2) Следствия теоремы Рисса-Шаудера.

Тема 3: «Линейные уравнения в (B)-пространствах с вполне непрерывными операторами» *Практическое занятие №14:*

1) Постановка задачи.
2) Нетеровы операторы.

Практическое занятие №15:

1) Теоремы Фредгольма.
2) Примеры уравнений с вполне непрерывным оператором.

Тема 4: «Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта»

Практическое занятие №16:

1) Эрмитовы операторы.
2) Основные свойства эрмитовых операторов.

Практическое занятие №17:

1) Теорема Гильберта-Шмидта.
2) Операторы Гильберта-Шмидта. *Практическое занятие №18:*
3) Интегральные операторы Фредгольма
4) Задача Штурма-Лиувилля.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины функциональный анализ лежит лекционносеминарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Учебно-методические пособия для самостоятельной работы

1) Колмогоров,А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.

2) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.

3) Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие / Люстерник Л.А., В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань : Изд. высшая школа, 1982. - 270,[1] с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0976-1: 288-75.

3) Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : [учебное пособие для вузов] / Кириллов А.А., А. Д. Гвишиани. - М. : Наука, 1979. - 384 с. : ил. - Библиогр.: с.
369-372. - Предм. указ.: с. 373-377. - 1-10.

4) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.

Задания для самостоятельной работы

1. Докажите полноту пространства $L_b(R^n, R^n)$.
2. Привести пример последовательности линейных ограниченных операторов $L(H)$, H - гильбертово пространство сходящееся в $L_s(H)$, но не в $L_b(H)$.

3. Найти A^* для $A \in L(R^n, A^n)$.
4. Найти сопряженный оператор для линейного интегрального оператора Фредгольма с непрерывным ядром в пространстве $C_{[a,b]}$.
5. Доказать, что линейный оператор Фредгольма с непрерывным ядром вполне непрерывен в пространстве $C_{[a,b]}$.
6. Приведите примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.

7. Рассмотрим интегральные уравнения Вольтера второго рода

$$X(t) - \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)ds = y(t),$$

где $K(t,s)$ и $y(t)$ непрерывные функции при $a \le s \le t \le b$.

8. Показать, что однородное уравнение Вольтера второго рода не имеет собственных значений.
9. Доказать, что в предгильбертовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

3. Пусть E - вещественное ЛНП и для любых $x, y \in E$ выполняется равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

задает в E скалярное произведение, согласующееся с нормой в E, т.е. такое, что $(x,x) = \|x\|^2$.

10. Сформулируйте альтернативу Фредгольма для линейного интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром в пространстве $C_{[a,b]}$.

Разделы и темы для самостоятельного изучения	**Виды и содержание самостоятельной работы**
Раздел 1. Интеграл Лебега	

1. Мера Лебега и его свойства	Рефераты на темы: 1Основные классы множеств: кольцо, полукольцо, алгебра множеств. 2. Построение меры Лебега в R^1
2. Измеримые множества и функции	Доклады на темы: 1. Борелевские множества. 2. Различные виды сходимости измеримых функций и связь между ними. 3. Теоремы Лузина и Егорова.
3. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной мере	Доклад на тему: Переход к пределу под знаком интеграла.
4. Теорема Фубини о повторном интеграле	Доклад на тему: Приложения теоремы Фубини.
Раздел 2. Банаховы пространства и вопросы аппроксимации в банаховых пространствах	
1. Метрические пространства	Доклад на тему: Метризационные теоремы.
2. Теорема Хана-Банаха о и отображение двойственности	Доклад на тему: Геометрические и аналитические формулировки теоремы Хана-Банаха.
3. Лебеговы пространства и им сопряженные. Сопряженные операторы	Доклад на тему: Рефлексивность лебеговых пространств.
Раздел 3. ***Гильбертовы пространства. Преобразование Фурье***	
1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства	Реферат на тему: Примеры гильбертовых и предгильбертовых пространств. Решение задач и упражнений.
2. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства	Доклад на тему: Теорема о проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве и некоторые его приложения.
3. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве	Доклад на тему: Значение теоремы Рисса об общем виде линейного функционала.
4. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и изоморфизм гильбертовых пространств	Доклад на тему: Ряды Фурье по различным ортонормированным полным системам в гильбертовом пространстве.
5. Преобразование Фурье и теорема Планшереля	Доклад на тему: Свойства преобразования Фурье.
Раздел 4. Пространства сходимости. Обобщенные функции	
1. Линейные пространства сходимости и им сопряженные	Доклад на тему: Локально выпуклые пространства.
2. Обобщенные функции	Решение задач и упражнений.
Раздел 5. Ограниченные операторы. Компактные множества	
1. Теорема Бэра о категориях и принцип равномерной ограниченности	Решение задач и упражнений.
2. Сильная и слабая сходимость.	Доклад на тему: Смысл сильной и слабой сходимостей в конкретных банаховых пространствах
3. Теоремы об обратном операторе и замкнутом графике. Спектр ограниченного оператора	Реферат на тему: Приложения теоремы об обратном операторе
4. Компактные множества. Критериий компактности Хаусдорфа и ее следствия.	Доклад на тему: Критерии компактности в некоторых классических пространствах функционального анализа.
5. Критерий компактности в пространствах C[a,b] и L_p	Решение задач и упражнений

6. Слабо компактные множества и их свойства	Доклад на тему: Описание слабо компактных множеств в конкретных банаховых пространствах.
Раздел 6. Компактные операторы. Линейные операторные уравнения в банаховых пространствах с вполне непрерывными операторами	
1. Компактные операторы и их свойства	Решение задач и упражнений.
2.Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора.	Доклад на тему: Разбиение спектра ограниченного оператора.
3.Линейные операторные уравнения в (В)пространстве с вполне непрерывными операторами.	Доклад на тему: Примеры уравнений, сводимых к операторному уравнению в (В)-пространстве с вполне непрерывными оператормаи.
4.Свойства эрмитовых операторов и теорема Гильберта-Шмидта.	Доклад на тему: Операторы Гильберта-Шмидта.
5.Интегральные операторы Фредгольма и задача Штурма-Лиувилля	Доклад на тему: Краевые задачи математической физики, сводимые к изучению интегральных операторов Фредгольма..

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура оценивания
ОПК-1	Знает: место функционального анализа внутри математики и возможностей функионально аналитического подхода при решении различных задач теории дифференциальных и интегральных уравнений Умеет: формулировать задачи дифференциальных и интегральных уравнений на языке функционального анализа Владеет: основными методами функционального анализа	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ОПК-3	Знает: основные понятия и теоремы функционального анализа Умеет: видеть связь идей и методов функционального анализа с другими разделами математики и физики Владеет: методами функционального анализа и их применением для решения типовых задач математики и физики	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен

ПК-3	Занать: основные методы и принципы функционального анализа, основные конструкции и методы функционального анализа, основные свойства конкретных банаховых и гильбертовых пространств, операторов и функционалов, действующих в них Умеет: применять основные принципы и методы функционального анализа при доказательстве различных утверждений Владеет: доказательствами основных теорем функционального анализа; методами функционального анализа для доказательства утверждений	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-4	Знает: основные свойства банаховых и гильбертовых пространств, ограниченных линейных операторов, компактных линейных операторов, самосопряженных операторов. Умеет: четко формулировать условия	Представление и защита курсовых, рефератов
	применимости различных теорем функционального анализа Владеет: навыками дискуссии, способностью публично представлять собственные и известные научные результаты	
ПК-11	Знает: основные приемы функционально аналитического подхода к решению прикладных задач Умеет: устанавливать полноту или неполноту, сепарабельность или несепарабельность, компактность или некомпактность метрических пространств; устанавливать свойства данных линейных или нелинейных операторов Владеет: основными методами функционального анализа для проведения методического и экспертного анализа поставленной задачи	Контрольная работа, решение задач

7.2. Типовые контрольные задания

7.2.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму

1. Применение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений.
2. Применение принципа сжимающих отображений к решению систем линейных алгебраических уравнений.
3. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений.

4. Применение принципа сжимающих отображений к нахождению пределов последовательностей, заданных рекуррентно.
5. Линейные нормированные пространства, их связь с метрическими.
6. Примеры банаховых пространств.
7. Неравенства Гельдера и Минковского.
8. Пространства $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$, их полнота.
9. Норма в предгильбертовом пространстве. Примеры.
10. Тождество параллелограмма.
11. Непрерывные линейные операторы. Норма оператора.
12. Пространство линейных операторов, его полнота.
13. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор.
14. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.
15. Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах.
16. Универсальность пространства $C_{[0,1]}$.

7.2.2. Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

Какие из следующих утверждений справедливы для операции □симметрической разности

a. $A□B$ □ $(A□C)$ □$(C$ □$B)$

b. $A□B$ □ $(A□C)$ □ $(C$ □$B)$

c. $A□B$ □ $(A□C)$ □ $(C$ □$B)$

d. $A□B$ □ $(A□C)$ □ $(C$ □$B)$

2. Пусть A,B□2^x и (A_n)□$_{n□1}$ □ 2^x - данная последовательность, □$_E$ □ характеристическая функция множества E□X . Верно ли следующее предложение?

a. $(A$□ $\lim A_n)$ □ (□$_A(x)$ □ $\lim$ □$_{A_n}(x))$ n□□ n□□

b. □$_{A□B}(x)$ □$|$□$_A(x)$ □□$_B(x)|$

c. □$_{\underline{\lim} A_n}(x)$ □ $\lim_n$□□$\inf$ □$_{A_n}(x)$

d. □$_{n\overline{\lim}□□A_n}(x)$ □ $\lim_n$□□$\sup$□$_{A_n}(x)$

3. Пусть $f : X$ □Y произвольное отображение и A_t □2^x , B_t □Y где t □T и T - произвольное множество индексов, которое из следующих предложений относятся к образам и прообразам множеств? a. $f(\bigcup_t A_t)$ □$\bigcup_t f(A_t)$

b. $f(\bigcap A_t) \square \bigcup f(A_t)$ t t

c. $f(A_1) \setminus f(A_2) \square f(A_1 \setminus A_2)$

d. $f^{\square 1}(\bigcup_t B_t) \square \bigcup_t f^{\square 1}(B_t)$

4.Пусть $f: X \square Y$ произвольное отображение X в Y,
$g,h: Y \square X$ - данные отображения, а $f(x) \square y$,(*)- данное уравнение. Какое из следующих уравнений верное?

a.Если уравнение (*) имеет решение и $g_0 f \square I_x$, то это решение единственно;

b.Если $g_0 f \square I_Y$, то уравнение (*) имеет, по крайней мере одно решение

c.Если f имеет обратное отображение, то уравнение (*) имеет решение, но не единственное. d. $f(X) \square Y$

5. Пусть X - множество прямых l плоскости и пусть $l_1 \square l_2 (\mathrm{mod}\ R_a)$ означает, что $l_1 \| l_2$, $l_1 \square l_2 (\mathrm{mod}\ R_b)$, означает, что $l_1 \square l_2$. Какие из следующих высказываний верны?

a. $X | R_a$ - можно отождествить с множеством всех (неориентированных) прямых проходящий через фиксированную точку плоскости b. R_a - отношение эквивалентности в X

c. R_b- не является отношением эквивалентности в X

d. R_a и R_b- отношение эквивалентности в X

6.Пусть X - произвольное множество, R - отношение эквивалентности в X
Найдите из следующих предложений верное:

a. Всякое разбиение X соответствует некоторому отношению эквивалентности R в X.

b. Элементы $X | R$ образует разбиение

c.Элементы $X | R$ не образует разбиение

d. Не всякое разбиение X определяет некоторое отношение эквивалентности R в X.

7. Какое из следующих предложений верно?

a. $(N, \square)$ (множество натуральных чисел с естественным порядком)

b.$(G, \square)$ (множество всех окрестностей фиксированной точки $x \square R^n$, упорядоченное по обратному включению) – направленное множество.

с.Пусть x□R^n произвольная точка и □- множество интервалов □ , содержащий точку x с отношением порядка L : «I_1 □ I_2 означает I_1 □ I_2» (□,□) не является направленным множеством

d. Множество N нельзя упорядочить

□*оприх* □ *y*

8. В метрическом пространстве (E,□), где □(x, y) □ □, какое из □1 *прих* □ *y* следующих предложений верно?

a. Любое подмножество в E одновременно и открыто и замкнуто

b. Одноточечное множество не открыто.

c. Все множества открыты

d. одноточечное множество не открыто и не замкнуто

9. какие из следующих предложений верные?

a. □p□[1,□□]: (K^n,□□)- метрическое пространство

b.□p□[1,□□]: сходимость в (K^n,□□)- эквивалентна равномерной по координатной сходимости. c. p □ 2

d. p□□

10.Какому условию должна удовлетворяться определенная на R непрерывная функция u □ f (u), чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства □(x, y) □| f (x) □ f (y) |? a. f □ монотонная и f (R) □ R

b. f □ *const* c f □

непрерывна на R d. f

□разрывна

11.Пусть p□[1,□□] и функция □□ : K^n □K^n □R, где n□N, K □Rили C и

□ n —1

□[□| x_k □y_k |^p] ^{p}*если* p□[1,□□),

□

□$_p$ (x, y) □□ k□1

□□□ sup|x_k □y_k |,k□*если*N p□□.

Какое из следующих приложений верно?

a.□p□[1,□□): □K^n,□$_p$□ метрическое пространство

b. □p□[1,□□) метрическое пространство

c. p □ 2

d. p□□

12. Пусть p□[1,□□] и функция □□ : K^n □K^n □R, где n□N, K□Rили C и

□ $_n$ $\_1$

□□[□| x_k □y_k |^p] ^{p}*если* p□[1,□□),

□$_p$ (x, y) □□ $_{k□1}$

□□□ sup|x_k □y_k |,$_{k□}$*если*$_N$ p□□.

Какое из следующих приложений верно?

a. □p□[1,□□) сходимость в □K^n,□$_p$□ эквивалентна равномерной по координатной

сходимости

b.Любое ограниченное множество в □K^n,□$_p$□ вполне ограниченно, а любое ограниченное замкнутое множество компактно. c. p □ 2

d. p□□

13. Пусть p□[1,□□] и функция □□:l_p □l_p □ R определена соотношениями:

□ $_n$ $\_1$

□□[□| x_k □y_k |^p] ^{p} *если* p□[1,□□),

□$_p(x, y)$ □□ $_{n□1}$

□□□ sup|x_k □y_k |,$_{k□}$*если*$_N$ p□□.

Какие из следующих предложений справедливы?

a.□p□[1,□□): (l_p,□$_p$)метрическое пространство

b. Из сходимости в (l_p, ρ_p) при $p \in [1, +\infty)$ следует покоординатная сходимость

c. (l_3, ρ_3) не метрическое пространство

d. (l_1, ρ_1) не метрическое пространство

14. Пусть $p \in [1, +\infty]$ и функция $\rho_p : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} & \text{если } p \in [1, +\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих предложений справедливы?

a. $\forall p \in [1, +\infty)$: (l_p, ρ_p) метрическое пространство

b. Сходимость в (l_∞, ρ_∞) совпадает с равномерной покоординатной сходимостью при $p \in [1, +\infty)$ следует покоординатная сходимостью с. (l_3, ρ_3) не метрическое пространство

d. (l_1, ρ_1) не метрическое пространство

15. Пусть $p \in [1, +\infty]$ и функция $\rho_p : l_p \times l_p \to R$ определена соотношениями:

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} & \text{если } p \in [1, +\infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

a. (l_p, ρ_p) полное метрическое пространство при $p \in [1, +\infty)$

b. (l_∞, ρ_∞) не является сепарабельным метрическим пространством

c. (l_∞, ρ_∞) является сепарабельным метрическим пространством

d. (l_p, ρ_p) неполное метрическое пространство

16. Какие из следующих утверждений несправедливы?

a. Любое ограниченное множество в (l_∞, ρ_∞) вполне ограничено

b. Пространства (l_p, ρ_p) при $p \in [1, \infty)$ некомпактны

c. Пространства (l_p, ρ_p) при $p \in [1, \infty)$ компактны

d. Любое ограниченное множество в (l_p, ρ_p) при $p \in [1, \infty)$ вполне ограниченно

17. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\rho_p : l_p \times l_p \to R$, где

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \text{ если } p \in [1, \infty), \\ \sup_{k \in N} |x_k - y_k|, \text{ если } p = \infty. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений справедливы?

a. $l_p \subset l_q$ при $p < q$, $p, q \in [1, \infty)$

b. $l_\infty \subset l_1$

c. $l_p \subset l_q$ при $p > q$, $p, q \in [1, \infty)$

d. $l_p \not\subset l_q$ и $l_q \not\subset l_p$ при $p \neq q$, $p, q \in [1, \infty)$

18. Пусть $s = \{f \mid f : N \to R\}$ и фикция $\rho : s \times s \to R$ определена равенством

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(n) - g(n)|}{1 + |f(n) - g(n)|}.$$

Какие из следующих утверждений верны?

a. (s, ρ)-компактное пространство

b. Сходимость в (s, ρ) равномерная покоординатная

c. (s, ρ) - полное пространство

d. (s, ρ)- сепарабельное пространство

19. Пусть $s = \{f \mid f : N \to R\}$ и фикция $\rho : s \times s \to R$ определена равенством

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(n) - g(n)|}{1 + |f(n) - g(n)|}.$$

Какие из следующих утверждений верны?

a. На (s, ρ) можно задать норму так, что $\rho(x, y) = \| x - y \|$

b. Любое множество в (s, ρ) предкомпактное

c. (s, ρ)- линейное метрическое пространство

d. Сходимость вS по координатная

20. Какие из следующих утверждений справедливы?

a. В любом метрическом пространстве замыкание шара $\overline{B(x,r)}$ лежит в замкнутом

шаре$\overline{B}(x,r)$.

b. В любом метрическом пространством E для любого r 0 выполняется неравенство 0 $diamB(x,r)$ 2r. c.$diamB(x,r)$ 3r

d. $diamB(x,r)$ 0.

*7.2.3. **Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов***

1. Скалярное произведение в линейном пространстве над полем (действительных или комплексных) скаляров.
2. Принцип равномерной ограниченности (=теорема Банаха-Штейнхауса).
3. Неравенство Коши-Буняковского. Предгильбертово пространство. Непрерывность скалярного произведения и нормы в предгильбертовом пространстве.
4. Критерий поточечной сходимости ограниченных линейных операторов к линейному ограниченному оператору.
5. Определение гильбертова пространства. Понятие ортогонального дополнения множества и его замкнутость.
6. Критерий поточечной сходимости последовательности и линейных ограниченных функционалов к линейному ограниченному функционалу.
7. Лемма Беппо-Леви.
8. Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора, отображающего ЛНП на ЛНП.
9. Задача. Напишите общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $L_p(p$(1,)). Привести конкретный пример функционала и найти норму.
10. Теорема о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве 11. Теорема об ограниченной обратимости оператора IA.
12. Ортогональное разложение гильбертово пространства.
13. Теорема об условиях ограниченной обратимости оператора $B$$A$, где A,$A$$L_b(E, F)$.
14. Критерий всюду плотности множества в гильбертовом пространстве.
15. Теорема Банаха о гомеоморфизме.
16. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала, определенного в гильбертовом пространстве.

17. Утверждения об открытости множества регулярных значений линейного ограниченного оператора и замкнутости его спектра.
18. Понятие ортогональной системы и ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Понятие ряда Фурье и вопрос о его сходимости.
19. Эквивалентные формулировки понятия замкнутого линейного оператора и замкнутости его спектра.
20. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Свойство частных сумм ряда Фурье.
21. Теорема Банаха – Хана о продолжении линейного ограниченного функционала в ЛНП.

7.2.4. Примерные вопросы к экзамену по дисциплине

1. Кольцо множеств, полукольцо множеств, алгебра и сигма-алгебра множеств. Измеримое пространство.
2. Монотонный класс множеств и теорема о монотонном классе.
3. Конечно-аддитивная и счетно-аддитивная функция множеств, продолжение меры на кольцо.
4. Мера Стилтьеса.
5. Внешняя мера, измеримые множества.
6. Теорема Каратеодори об измеримых множествах.
7. Продолжение меры по Лебегу и Жордану.
8. Измеримые функции и их свойства.
9. Различные типы сходимости функций и связь между ними.
10. Теоремы Лузина и Егорова.
11. Интеграл Лебега по счетно-аддитивной функции множества.
12. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега и теорема Радона-Никодима (без доказательства).
13. Теорема о монотонной сходимости.
14. Лемма Фату.
15. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
16. Произведение мер и теорема Фубини (без доказательства).
17. Мера Лебега в R^n.
18. Критерий Лебега интегрируемости по Риману.
19. ЛНП и (B)-пространства: определения и примеры.
20. Пространства ограниченных операторов L(E,F) и его полнота.
21. Изоморфизм (B)-пространств.
22. Принцип продолжения линейных ограниченных операторов по непрерывности в (B)-пространствах.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении.
24. Сопряженные и рефлексивные пространства.
25. Теорема об общем виде функционала $f \in \left(C_{([a,b])}\right)^*$.

26. Биортогональные системы: определение и примеры.
27. Отображения двойственности и рефлексивные пространства.
28. Неравенства Гельдера и Минковского для рядов и интегралов.
29. Лебеговы пространства $L_p(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$ и их свойства.
30. Сопряженное пространство $L_p^*(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$.
31. Сопряженные линейные операторы.
32. Строго ЛНП и наилучшие приближения в ЛНП.
33. Наилучшие приближения в $L_p(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$.
34. Всюду плотные множества в $L_p(X)$ $(1\leq p \leq \infty)$, аппроксимация гладкими функциями.
35. Предгильбертовы (=евклидовы) и гильбертовы пространства: определения и примеры.
36. Теорема о наилучшем приближении и ее следствия.
37. Теорема Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
38. Ортогональные системы и теорема Стеклова о полноте.
39. Изоморфизм гильбертовых пространств.
40. Преобразование Фурье в $L_1(R^n)$, формулы преобразования Фурье.
41. Преобразование Фурье в $L_2(R^n)$, теорема Планшереля об операторе Фурье
42. Аксиомы сходимости по Френе, линейные пространства сходимости, полнота сопряженных пространств.
43. Принцип равномерной сходимости функционалов в сопряженном пространстве для пространства сходимости.
44. Локально выпуклые пространства.
45. Пространства основных функций D(Rn) и обобщенный функций D´(Rn), Действия с обобщенными функциями.
46. Структура обобщенных функций.
47. Сопряженное пространство E´(Rn).
48. Свойства пространства E´(Rn), регулярные обобщенные функции.
49. Пространства Соболева.
50. Пространства Шварца J´(Rn) и преобразование Фурье в J´(Rn).
51. Теорема Бэра о категориях в метрическом пространстве.
52. Принцип равномерной ограниченности для ЛНП.
53. Сильная и слабая сходимость операторов.
54. Слабая* сходимость функционалов.
55. Теорема о замкнутом графике.
56. Теорема об обратном операторе.
57. Спектр ограниченного оператора, граница спектра и спектральный радиус.
58. Компактные множества и их свойства в метрическом пространстве.
59. Критерий компактности Хаусдорфа и ее следствие.
60. Критерий компактности множества в C(X).

61. Критерий компактности множества в пространствах lp и Lp(X) ($1\leq p \leq \infty$).
62. Слабо* компактные множества и их свойства.
63. Критерий слабой* компактности множества 64. Компактные операторы и их основные свойства.
65. Теорема Рисса-Шаудера о спектре вполне непрерывного оператора в (B)пространстве.
66. Четыре теоремы Фредгольма.
67. Свойства эрмитовых операторов.
68. Теорема Гильберта-Шмидта.

7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %. Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 30баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

Основная

1) Колмогоров,А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 624 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1-50.
2) Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие / Люстерник Л.А., В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - СПб. [и др.] : Лань : Изд. высшая школа, 1982. - 270,[1] с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0976-1: 288-75.
3) Рамазанов А.К. Функциональный анализ : учеб. пособие для вузов. Ч.1 / Рамазанов А.К., Р. К. Рагимханов ; Минобрнауки России, Дагест. гос. ун-т. - Махачкала : Изд-во ДГУ, 2013. - 318,[1] с. - 222-00.
4) Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е,

испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN 5-9221-0271-0 : 151-01. 5) Асташова И.В. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Асташова И.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2011.— 112 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11120.html.— ЭБС «IPRbooks» (25.01.2018)

Дополнительная

6) Фёдоров В.М. Курс функционального анализа : учебник / Фёдоров В. М. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 351 с. ; 20 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 351. - ISBN 5-8114-0589-8 : 187-66.
7) Рудин У. Функциональный анализ / Рудин, Уолтер ; пер. с англ. В.Я.Лина; под ред. Е.А.Горина. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. [и др.] : Лань, 2005. - 443 с. ; 23 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 430-431. - Указ. имен. и терминов: с. 435-440 . - ISBN 5-8114-0611-8 : 312-18.
8) Канторович Л.В. Функциональный анализ / Канторович, Леонид Витальевич. - 2е изд., перераб. - М. : Наука, 1977. - 741 с. : ил. ; 22 см. - Список лит.: с.719-730. - Указ. предм.: и обозначений: с. 731-741. - 3-20.
9) Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Глазырина П.Ю., Дейкалова М.В., Коркина Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 216 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/66213.html.— ЭБС «IPRbooks» (25.05.2018)

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.

2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	**Студентам:** - запустить установленный у Вас математический паке выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакет подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. **Всем заинтересованным пользователям:** **1.** – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. **2.** – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (MathNet.**Ru**)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по функциональному анализу распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

Дисциплин «Функциональный анализ» являются основной базой всех специальных дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплинs состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;

б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;

в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

Методические рекомендации

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981.

2 Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* М.: Высшая школа, 1982.

3 Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с. - ISBN

Решить задач и упражнений из учебного пособия Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.
Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросами для самопроверки
Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Треногин В А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие для втузов / Треногин В.А.; Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Физматлит, 2002. - 239 с.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по функциональному анализу рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.
При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.
В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.