

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

Кафедра: дифференциальных уравнений и функционального анализа
Факультете: математики и компьютерных наук

Образовательная программа
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профили подготовки:
Математический анализ и приложения

Уровень высшего образования
бакалавриат

Форма обучения
очная

Статус дисциплины:
вариативная часть, дисциплина по выбору

Махачкала 2018

Рабочая программа дисциплины составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки от 7 августа 2014 г № 943 02.03.01 Математика и компьютерные науки).

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,
Джабраилова Л.М., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2018г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2018г.,
протокол № 6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим
управлением

«29» июня 2018г.  Гасангаджиева А.Г.

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины	4
1. Цели освоения дисциплины	4
2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры	5
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения)	5
4. Объем, структура и содержание дисциплины	6
5. Образовательные технологии	9
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов	9
Задания для самостоятельной работы	9
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины	11
Вопросы для самостоятельной работы	15
Вопросы к экзамену по дисциплине	16
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	17
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	Ошибка! Закладка не определена.
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	Ошибка! Закладка не определена.
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	Ошибка! Закладка не определена.

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Теория меры и интеграла» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению

02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

К основным задачам данного курса относятся изучение основных свойств аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и конструирование мер Стильеса, Стильеса-Бореля и Стильеса-Лебега на прямой с помощью функций ограниченной вариации.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
общепрофессиональных – ОПК-1,
профессиональных – ПК-3.ПК-10.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия и самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 4 зачетных единиц, в том числе 144 в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцирован ный зачет, экзамен
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							
	Всего	из них						
Лек ции		Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции			
8	144	30		30			84	Экзамен

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Теория меры и интеграла" является научить слушателей понимать основные положения абстрактной теории аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и связь мер Стильеса, Бореля-Стилтьеса и Стильеса-Лебега функциями ограниченной вариации вещественного аргумента. Понятие и факты курса составляют фундамент многих разделов современного анализа.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина *Теория меры и интеграла* входит в вариативную часть образовательной программы по направлению *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

Предполагает знание основных понятий и методов математического анализа и общей топологии в рамках первых двух курсов математического факультета, а также знаний свойств функций основных классов функций действительного переменного.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	<p>Знает :основные понятия и теоремы теории меры,различные естественно-научные модели ,где возникают аддитивные функции множества и интегралы по ним.</p> <p>Умеет : давать сравнительный анализ разных понятий теории меры, умеет устанавливать измеримость функций, основные свойства заданных классов множеств, умеет решать задачи по теории метрических пространств.</p> <p>Владеет : навыками работы с различными классами множеств и аддитивных функций множества для адекватного применения в той или иной области математики или естественно-научных дисциплин.</p>
ПК-3	способностью строго доказать утверждение,сформулировать результат,увидеть следствия полученного результата	<p>Знает: определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе. Знает формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере</p> <p>Умеет: анализировать свойства основных классов множеств, применять их в прикладных задачах. Умеет доказывать существенность или необходимость исходных условий важнейших теорем интегрального исчисления .</p> <p>Владеет: современными методами теории меры. Владеет достаточной</p>

		информацией о современном уровне развития анализа в разделах публично представляемых научных результатов.
ПК-10	Способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях	Знает: основные методы и приемы педагогической деятельности с учетом специфики преподавания математики в образовательном учреждении. Умеет :планировать тематику занятий и вести педагогическую деятельность. Владет : необходимыми профессиональными знаниями и методикой преподавания математики в образовательных учреждениях

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 4, академических часов 144.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации(по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура								
<i>Всего по модулю 1</i>	8		10	10			16	контрольная работа
1.Основные классы множеств			4	4			8	
2.Порожденные классы множеств			6	6		1	8	
Модуль2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства								
<i>Всего по модулю 2</i>	8		10	10			16	коллоквиум, контрольная работа
1. Функции множества. Меры.			4	4		1	8	
2. Продолжение меры			6	6			8	
Модуль3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента. Теория меры на прямой								
<i>Всего по модулю 3</i>	8		10	10		1	16	контрольная работа
1. Функции вещественной переменной с ограниченной			4	4			4	

вариации								
2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации			2	2	1		4	
3. Мера Стильгеса и Бореля-Стильгеса			2	2			4	
4. Мера Стильгеса-Лебега			2	2			4	
Модуль 4. Промежуточная аттестация								
Подготовка к экзамену							36	экзамен
ИТОГО за 8семестр		14 4	30	30	4		80	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

ЛЕКЦИИ

Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура

Тема 1. Основные классы множеств

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

Тема 2. Порожденные классы множеств

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства

Тема 1. Функции множества. Меры.

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

Тема 2. Продолжение меры

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента.

Теория меры на прямой.

Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

Тема 2. Вещественные функции вещественной переменной с ограниченной вариации
Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.

Тема 3..Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса

Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.

Тема 4. Мера Стильеса-Лебега

Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура

Тема 1. Основные классы множеств

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

Тема 2.Порожденные классы множеств

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства

Тема 1. Функции множества. Меры.

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

Тема 2.Продолжение меры

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента.

Теория меры на прямой.

Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

Тема 2. Вещественные функции вещественной переменной с ограниченной вариации
Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.

Тема 3..Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса

Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.

Тема 4. Мера Стильеса-Лебега

Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины " Теория меры и интеграла " лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для обеспечения самостоятельной работы магистров использовать учебное пособие
1) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.

2) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.

3) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. *Аддитивные функции множества и смежные вопросы*. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

Задания для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо, σ - кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская σ – алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.

7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
12. Свойства σ - а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении σ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимости в пространстве функций ограниченной вариации.

Рефераты, доклады и задания по темам для самостоятельной работы

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Раздел 1. Основные классы множеств, их свойства и структура	
1. Основные классы множеств	Доклад на тему: Пи-классы и лямбда-классы множеств
2. Порожденные классы множеств	Доклад на тему: Приложения теоремы о монотонном классе

Раздел 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства	
1. Функции множества. Меры.	Реферат на тему: Основные свойства функций множества.
2. Продолжение мер.	Доклад на тему: Измеримость по Каратеодори
Раздел 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента	
1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: функция скачков.
2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: Теорема Хелли
Раздел 4. Теория меры на прямой	
1. Меры Стильтьеса и Бореля-Стильтьеса	Реферат на тему: Построение меры Лебега в \mathbb{R}^1
2. Мера Стильтьеса-Лебега	Доклады на темы: 1. Борелевские множества на прямой. 2. Суслинские множества на прямой.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	<p>Знает :основные понятия и теоремы теории меры,различные естественно-научные модели ,где возникают аддитивные функции множества и интегралы по ним.</p> <p>Умеет : давать сравнительный анализ разных понятий теории меры, умеет устанавливать измеримость функций, основные свойства заданных классов множеств, умеет решать задачи по теории метрических пространств.</p> <p>Владеет : навыками работы с различными классами множеств и аддитивных функций множества для адекватного применения в той или иной области математики или естественно-научных дисциплин</p> <p>Знает: определения и</p>	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен

ПК-3	<p>способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</p>	<p>важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе. Знает формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере Умеет: анализировать свойства основных классов множеств, применять их в прикладных задачах. Умеет доказывать существование или необходимость исходных условий важнейших теорем интегрального исчисления . Владеет: современными методами теории меры. Владеет достаточной информацией о современном уровне развития анализа в разделах публично представляемых научных результатов.</p>	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-10	<p>Способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях</p>	<p>Знает: основные методы и приемы педагогической деятельности с учетом специфики преподавания математики в образовательном учреждении. Умеет : планировать тематику занятий и вести педагогическую деятельность. Владеет : необходимыми профессиональными знаниями и методикой преподавания математики в образовательных учреждениях</p>	

--	--	--	--

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

7.2. Типовые контрольные задания

Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
2. Борелевская σ – алгебра множеств.
3. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
4. Свойства аддитивной функции множества.
5. Свойства полной вариации а.ф.м..
6. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
7. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
8. Свойства положительной а.ф.м..
9. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
10. Свойства σ - а.ф.м..
11. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
12. Непрерывность конечной положительной меры.
13. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
14. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
15. Теорема Лебега о разложении σ - а.ф.м..
16. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
17. Лебеговский метод продолжения меры.
18. Теорема Хана о продолжении.
19. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
20. Мера Бореля.
21. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
22. Свойства функции ограниченной вариации
23. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.

24. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
25. Критерий функции ограниченной вариации.
26. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
27. Определение функции скачков и их свойства.
28. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
29. Свойства производной неопределенной полной вариации.
30. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
31. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
32. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
33. Полнота пространства функций ограниченной вариации.

Примерные контрольные работы

Вариант 1.

1. Показать, что неотрицательная, аддитивная и сигма-полуаддитивная функция множества, заданная на кольце есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система всех подмножеств произвольного фиксированного множества является сигма-алгеброй.
3. Найдите полную вариацию функции $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$ на отрезке $[a, b]$.
4. Доказать, что система всех интервалов (включая пустой) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Пусть R – кольцо. Доказать, что если мы возьмём симметрическую разность в качестве сложения и пересечение в качестве умножения, то R будет коммутативным кольцом в алгебраическом смысле, причем нулем этого кольца является пустое множество.

6. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n} \\ -x^2, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$ и

найдите $(L)\int_0^1 f(x)dx$.

Вариант 2.

1. Доказать, что неотрицательная, аддитивная и непрерывная снизу на кольце функция множества есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система \mathcal{B} всех конечных подмножеств заданного множества A является кольцом.
3. Найдите полную вариацию функции $y = \sin 2x - \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$.
4. Доказать, что система всех отрезков (с добавлением пустого множества) на числовой прямой не является полукольцом..
5. Построить систему множеств, которая замкнута относительно операций пересечения и объединения, но не является даже полукольцом.

6. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in I \cap [1; 2], \\ 2x, & x \in I \cap [0; 1], \\ \sin x, & x \in Q \end{cases}$ интегрируема по Лебегу на $[0, 2]$ и найдите $(L) \int_0^2 f(x) dx$.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо, σ -кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская σ -алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой.
12. Свойства σ -а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении σ -а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.

30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

Вопросы к экзамену по дисциплине

1. Основные системы множеств. Минимальные классы множеств, содержащие данную систему множеству.
2. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
3. Произведение систем множеств. Кольцо, σ -кольцо в произведении множеств.
4. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
5. Борелевская σ -алгебра множеств.
6. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
7. Свойства аддитивной функции множества.
8. Свойства полной вариации а.ф.м..
9. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
10. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
11. Свойства положительной а.ф.м..
12. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой.
13. Свойства σ -а.ф.м..
14. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
15. Непрерывность конечной положительной меры.
16. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
17. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
18. Теорема Лебега о разложении σ -а.ф.м..
19. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
20. Лебеговский метод продолжения меры.
21. Теорема Хана о продолжении.
22. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
23. Мера Бореля.
24. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
25. Свойства функции ограниченной вариации
26. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
27. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
28. Критерий функции ограниченной вариации.
29. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.

30. Определение функции скачков и их свойства.
31. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
32. Свойства производной неопределенной полной вариации.
33. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
34. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
35. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
36. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
37. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.
38. Условия сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
39. Условия поточечной сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
40. Принцип выбора Э.Хелли.
41. Меры Бореля-Стилтьеса и Лебега-Стилтьеса.
42. Характеристика борелевских мер.

7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

Основная литература:

1. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной : учебное пособие / И.П. Натансон. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1974. - 480 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802> (13.08.2018).

2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-9221-0266-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563> (13.08.2018).

3. Магомедов, Гаджи Абдулкадирович. Основы теории меры : учебное пособие / Магомедов, Гаджи Абдулкадирович, Р. К. Рагимханов, М. М. Сиражудинов. - Махачкала : ИПЦ ДГУ, 1997. 149 с. 10-00

4. Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.

5. Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

6. Богачев В.И. Основы теории меры. Том 1. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 544стр.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196>(13.07.2018).

2. Халмош, Пол. Теория меры : пер. с англ. / Халмош, Пол ; под ред. С.В. Фомина. - М. : Факториал Пресс, 2003. - 253 с. - (Серия "XX век. Математика и механика". Вып.3). - ISBN 5-88688-065-8 : 440-00.

3. Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко и др. - Москва : Физматлит, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331> (13.07.2018).

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека

2. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12 – Единое окно доступа к электронным ресурсам

3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer

4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ

5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/>(датаобращения:).

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Учебная программа по избранным главам математического анализа распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства

теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

При осуществлении образовательного процесса по избранным главам математического анализа рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Университет обладает достаточной базой оборудованных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины избранные главы математического анализа. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.