

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

# ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

**Кафедра:** дифференциальных уравнений и функционального анализа  
**Факультете:** математики и компьютерных наук

Образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профили подготовки:  
Математический анализ и приложения

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Форма обучения  
очная

Статус дисциплины:  
вариативная часть, дисциплина по выбору

Махачкала 2018

Рабочая программа дисциплины составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки от 7 августа 2014 г № 943 02.03.01 Математика и компьютерные науки).

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,  
Джабраилова Л.М., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2018г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.  
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2018г.,  
протокол № 6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.  
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим  
управлением

«29» июня 2018г.  Гасангаджиева А.Г.

## Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины .....	4
1. Цели освоения дисциплины .....	4
2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры .....	5
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .....	5
4. Объем, структура и содержание дисциплины .....	6
5. Образовательные технологии .....	9
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов .....	9
Задания для самостоятельной работы .....	9
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины .....	11
Вопросы для самостоятельной работы .....	15
Вопросы к экзамену по дисциплине .....	16
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....	17
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Теория меры и интеграла» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению

02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

К основным задачам данного курса относятся изучение основных свойств аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и конструирование мер Стильеса, Стильеса-Бореля и Стильеса-Лебега на прямой с помощью функций ограниченной вариации.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
общепрофессиональных – ОПК-1,  
профессиональных – ПК-3.ПК-10.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия и самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 4 зачетных единиц, в том числе 144 в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцирован ный зачет, экзамен
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							
	Всего	из них						
		Лек ции	Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции		
8	144	30		30			84	Экзамен

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Теория меры и интеграла" является научить слушателей понимать основные положения абстрактной теории аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и связь мер Стильеса, Бореля-Стилтьеса и Стильеса-Лебега функциями ограниченной вариации вещественного аргумента. Понятие и факты курса составляют фундамент многих разделов современного анализа.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина *Теория меры и интеграла* входит в вариативную часть образовательной программы по направлению 02.03.01 *Математика и компьютерные науки*

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

Предполагает знание основных понятий и методов математического анализа и общей топологии в рамках первых двух курсов математического факультета, а также знаний свойств функций основных классов функций действительного переменного.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	<p><b>Знает</b> :основные понятия и теоремы теории меры,различные естественно-научные модели ,где возникают аддитивные функции множества и интегралы по ним.</p> <p><b>Умеет</b> : давать сравнительный анализ разных понятий теории меры, умеет устанавливать измеримость функций, основные свойства заданных классов множеств, умеет решать задачи по теории метрических пространств.</p> <p><b>Владеет</b> : навыками работы с различными классами множеств и аддитивных функций множества для адекватного применения в той или иной области математики или естественно-научных дисциплин.</p>
ПК-3	способностью строго доказать утверждение,сформулировать результат,увидеть следствия полученного результата	<p><b>Знает:</b> определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе. Знает формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере</p> <p><b>Умеет:</b> анализировать свойства основных классов множеств, применять их в прикладных задачах. Умеет доказывать существенность или необходимость исходных условий важнейших теорем интегрального исчисления .</p> <p><b>Владеет:</b> современными методами теории меры. Владеет достаточной</p>

		информацией о современном уровне развития анализа в разделах публично представляемых научных результатов.
<b>ПК-10</b>	Способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях	<b>Знает:</b> основные методы и приемы педагогической деятельности с учетом специфики преподавания математики в образовательном учреждении. <b>Умеет</b> :планировать тематику занятий и вести педагогическую деятельность. <b>Владеет</b> : необходимыми профессиональными знаниями и методикой преподавания математики в образовательных учреждениях

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 4, академических часов 144.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации(по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
<b>Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>								
<b>Всего по модулю 1</b>	<b>8</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	контрольная работа
1.Основные классы множеств			4	4			8	
2.Порожденные классы множеств			6	6		1	8	
<b>Модуль2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b>								
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>8</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	коллоквиум, контрольная работа
1. Функции множества. Меры.			4	4		1	8	
2. Продолжение меры			6	6			8	
<b>Модуль3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента. Теория меры на прямой</b>								
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>8</b>		<b>10</b>	<b>10</b>		<b>1</b>	<b>16</b>	контрольная работа
1. Функции вещественной переменной с ограниченной			4	4			4	

вариации								
2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации			2	2	1		4	
3. Мера Стильеса и Бореля-Стильеса			2	2			4	
4. Мера Стильеса-Лебега			2	2			4	
<b>Модуль 4. Промежуточная аттестация</b>								
Подготовка к экзамену							<b>36</b>	экзамен
<b>ИТОГО за 8семестр</b>		14 4	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>4</b>		<b>80</b>	

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### **ЛЕКЦИИ**

#### **Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура**

##### *Тема 1. Основные классы множеств*

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

##### *Тема 2. Порожденные классы множеств*

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

#### **Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства**

##### *Тема 1. Функции множества. Меры.*

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

##### *Тема 2. Продолжение меры*

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

#### **Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента.**

##### **Теория меры на прямой.**

##### *Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

*Тема 2. Вещественные функции вещественной переменной с ограниченной вариации*  
Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.

*Тема 3..Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса*

Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.

*Тема 4. Мера Стильеса-Лебега*

Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

### **Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура**

*Тема 1. Основные классы множеств*

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

*Тема 2.Порожденные классы множеств*

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

### **Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства**

*Тема 1. Функции множества. Меры.*

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

*Тема 2.Продолжение меры*

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

### **Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента.**

**Теория меры на прямой.**

*Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

*Тема 2. Вещественные функции вещественной переменной с ограниченной вариации*  
Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.

*Тема 3..Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса*

Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.

*Тема 4. Мера Стильеса-Лебега*

Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

## 5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины " Теория меры и интеграла " лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для обеспечения самостоятельной работы магистров использовать учебное пособие  
1) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.

2) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.

3) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. *Аддитивные функции множества и смежные вопросы*. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

### Задания для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.

7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
12. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимости в пространстве функций ограниченной вариации.

### Рефераты, доклады и задания по темам для самостоятельной работы

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
<b>Раздел 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>	
1. Основные классы множеств	Доклад на тему: Пи-классы и лямбда-классы множеств
2. Порожденные классы множеств	Доклад на тему: Приложения теоремы о монотонном классе

<b>Раздел 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b>	
1. Функции множества. Меры.	Реферат на тему: Основные свойства функций множества.
2. Продолжение мер.	Доклад на тему: Измеримость по Каратеодори
<b>Раздел 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента</b>	
1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: функция скачков.
2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: Теорема Хелли
<b>Раздел 4. Теория меры на прямой</b>	
1. Меры Стилтеса и Бореля-Стилтеса	Реферат на тему: Построение меры Лебега в $\mathbb{R}^1$
2. Мера Стилтеса-Лебега	Доклады на темы: 1. Борелевские множества на прямой. 2. Суслинские множества на прямой.

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

### 7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	<p><b>Знает</b> :основные понятия и теоремы теории меры,различные естественно-научные модели ,где возникают аддитивные функции множества и интегралы по ним.</p> <p><b>Умеет</b> : давать сравнительный анализ разных понятий теории меры, умеет устанавливать измеримость функций, основные свойства заданных классов множеств, умеет решать задачи по теории метрических пространств.</p> <p><b>Владеет</b> : навыками работы с различными классами множеств и аддитивных функций множества для адекватного применения в той или иной области математики или естественно-научных дисциплин</p> <p><b>Знает:</b> определения и</p>	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен

ПК-3	<p>способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</p>	<p>важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе.  Знает формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере  <b>Умеет:</b> анализировать свойства основных классов множеств, применять их в прикладных задачах.  Умеет доказывать существование или необходимость исходных условий важнейших теорем интегрального исчисления .  <b>Владеет:</b> современными методами теории меры.  Владеет достаточной информацией о современном уровне развития анализа в разделах публично представляемых научных результатов.</p>	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-10	<p>Способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях</p>	<p><b>Знает:</b> основные методы и приемы педагогической деятельности с учетом специфики преподавания математики в образовательном учреждении.  <b>Умеет</b> : планировать тематику занятий и вести педагогическую деятельность.  <b>Владеет</b> : необходимыми профессиональными знаниями и методикой преподавания математики в образовательных учреждениях</p>	

--	--	--	--

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

## 7.2. Типовые контрольные задания

### Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
2. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
3. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
4. Свойства аддитивной функции множества.
5. Свойства полной вариации а.ф.м..
6. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
7. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
8. Свойства положительной а.ф.м..
9. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
10. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
11. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
12. Непрерывность конечной положительной меры.
13. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
14. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
15. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
16. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
17. Лебеговский метод продолжения меры.
18. Теорема Хана о продолжении.
19. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
20. Мера Бореля.
21. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
22. Свойства функции ограниченной вариации
23. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.

24. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
25. Критерий функции ограниченной вариации.
26. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
27. Определение функции скачков и их свойства.
28. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
29. Свойства производной неопределенной полной вариации.
30. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
31. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
32. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
33. Полнота пространства функций ограниченной вариации.

### Примерные контрольные работы

#### Вариант 1.

1. Показать, что неотрицательная, аддитивная и сигма-полуаддитивная функция множества, заданная на кольце есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система всех подмножеств произвольного фиксированного множества является сигма-алгеброй.
3. Найдите полную вариацию функции  $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$  на отрезке  $[a, b]$ .
4. Доказать, что система всех интервалов (включая пустой) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Пусть  $R$  – кольцо. Доказать, что если мы возьмём симметрическую разность в качестве сложения и пересечение в качестве умножения, то  $R$  будет коммутативным кольцом в алгебраическом смысле, причем нулем этого кольца является пустое множество.

6. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n} \\ -x^2, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$  интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$  и

найдите  $(L)\int_0^1 f(x)dx$ .

#### Вариант 2.

1. Доказать, что неотрицательная, аддитивная и непрерывная снизу на кольце функция множества есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система  $\mathcal{B}$  всех конечных подмножеств заданного множества  $A$  является кольцом.
3. Найдите полную вариацию функции  $y = \sin 2x - \cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$ .
4. Доказать, что система всех отрезков (с добавлением пустого множества) на числовой прямой не является полукольцом..
5. Построить систему множеств, которая замкнута относительно операций пересечения и объединения, но не является даже полукольцом.

6. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in I \cap [1; 2], \\ 2x, & x \in I \cap [0; 1], \\ \sin x, & x \in Q \end{cases}$  интегрируема по Лебегу на  $[0, 2]$  и найдите  $(L) \int_0^2 f(x) dx$ .

### Вопросы для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$ -кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$ -алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой.
12. Свойства  $\sigma$ -а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ -а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.

30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### Вопросы к экзамену по дисциплине

1. Основные системы множеств. Минимальные классы множеств, содержащие данную систему множеству.
2. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
3. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$ -кольцо в произведении множеств.
4. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
5. Борелевская  $\sigma$ -алгебра множеств.
6. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
7. Свойства аддитивной функции множества.
8. Свойства полной вариации а.ф.м..
9. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
10. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
11. Свойства положительной а.ф.м..
12. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
13. Свойства  $\sigma$ -а.ф.м..
14. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
15. Непрерывность конечной положительной меры.
16. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
17. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
18. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ -а.ф.м..
19. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
20. Лебеговский метод продолжения меры.
21. Теорема Хана о продолжении.
22. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
23. Мера Бореля.
24. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
25. Свойства функции ограниченной вариации
26. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
27. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
28. Критерий функции ограниченной вариации.
29. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.

30. Определение функции скачков и их свойства.
31. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
32. Свойства производной неопределенной полной вариации.
33. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
34. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
35. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
36. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
37. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.
38. Условия сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
39. Условия поточечной сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
40. Принцип выбора Э.Хелли.
41. Меры Бореля-Стилтьеса и Лебега-Стилтьеса.
42. Характеристика борелевских мер.

### **7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

#### ***Основная литература:***

1. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной : учебное пособие / И.П. Натансон. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1974. - 480 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802> (13.08.2018).

2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-9221-0266-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563> (13.08.2018).

3. Магомедов, Гаджи Абдулкадирович. Основы теории меры : учебное пособие / Магомедов, Гаджи Абдулкадирович, Р. К. Рагимханов, М. М. Сиражудинов. - Махачкала : ИПЦ ДГУ, 1997. 149 с. 10-00

4. Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.

5. Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

6. Богачев В.И. Основы теории меры. Том 1. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 544стр.

### ***Дополнительная литература:***

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196> (13.07.2018).

2. Халмош, Пол. Теория меры : пер. с англ. / Халмош, Пол ; под ред. С.В. Фомина. - М. : Факториал Пресс, 2003. - 253 с. - (Серия "XX век. Математика и механика". Вып.3). - ISBN 5-88688-065-8 : 440-00.

3. Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко и др. - Москва : Физматлит, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331> (13.07.2018).

### **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека

2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам

3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer

4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ

5. Moodle [Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/> (дата обращения:).

### **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по избранным главам математического анализа распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства

теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по избранным главам математического анализа рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой оборудованных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины избранные главы математического анализа. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.