

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Численные методы решения уравнений  
математической физики**  
Кафедра прикладной математики факультета математики и  
компьютерных наук

**Образовательная программа**  
*01.04.02 - Прикладная математика и информатика*

Профиль подготовки

**Математическое моделирование и  
вычислительная математика**

Уровень высшего образования

**Магистратура**

Форма обучения

***Очная***

Статус дисциплины: *вариативная*

Махачкала, 2018



Рабочая программа дисциплины «*численные методы решения уравнений математической физики*» составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика (уровень магистратура) от 28 августа 2015 г. N 911 .

Разработчик:  
кафедра прикладной математики, Абдурагимов Э.И., к.ф.-м. н., доцент.

Рабочая программа дисциплины одобрена:  
на заседании кафедры прикладной математики от 27.04.2018, протокол № 8;  
зав. кафедрой : \_\_\_\_\_ Кадиев Р.И.

и на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных от 27.06.2018, протокол №6;

председатель: Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. \_\_\_\_\_  
(подпись)

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Численные методы решения уравнений математической физики» входит в вариативную часть обязательных дисциплин образовательной программы *магистратуры* по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с различными численными методами решения уравнений математической физики, усвоением наиболее распространенных численных методов решения уравнений математической физики, а также знакомством с современными направлениями развития численных методов.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

профессиональных – ПК-1, ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме устного опроса, контрольных работ, зачета по лабораторным работам и промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 4 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семес тр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет по лаб. работам, контрольная работа, экзамен)
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лек ции	Лабораторн ые занятия	Практиче ские занятия	КСР	консульта ции				
9	144	6	26				112	экзамен.

## **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины «Численные методы решения уравнений математической физики» являются: усвоение различных численных методов решения уравнений математической физики, научить самостоятельно решать численными методами типичные задачи для уравнений математической физики, пользуясь ЭВМ; привить обучающимся умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по математике, развить у них математический стиль мышления. Конечная цель изучения этой дисциплины — стать специалистом по численным методам решения уравнений математической физики.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры**

Дисциплина «Численные методы решения уравнений математической физики» входит в вариативную часть обязательных дисциплин образовательной программы *магистратуры* по направлению 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Изучение дисциплины предполагает знание основных уравнений математической физики, постановки типичных задач для этих уравнений, знание метода сеток решения дифференциальных уравнений и умение применять их для нахождения приближенных решений, умение пользоваться различными пакетами прикладных программ для этой цели. Магистр, изучив эту дисциплину, должен научиться составлять алгоритмы решения типичных задач для уравнений математической физики, пользуясь изученными численными методами, и реализовать их на ЭВМ. При составлении математических моделей физических и технических задач могут возникать краевые задачи и задачи Коши для уравнений математической физики. Поэтому умение решать такие задачи полезно магистру как специалисту по направлению математическое моделирование.



<b>Модуль 1. Численные методы решения типичных задач для уравнений теплопроводности.</b>									
1	Основные понятия теории разностных схем	9	1-2	2		2		8	Опрос на занятиях
2	Метод сеток решения типичных задач для уравнений параболического типа	9	3-6	2		6		16	Опрос на занятиях, домашняя самостоятельная работа
	<i>Итого по модулю 1:</i>			4		8		24	<b>36</b>
<b>Модуль 2. Метод сеток решения типичных задач для уравнений Пуассона и Лапласа</b>									
3	Метод сеток решения типичных задач для уравнений Пуассона и Лапласа	9	7-12	2		10		24	Контрольная работа
	<i>Итого по модулю 2:</i>			2		10		24	<b>36</b>
<b>Модуль 3. Метод сеток решения типичных задач для уравнений колебания струны</b>									
4	Метод сеток решения типичных задач для уравнений колебания струны	9	13-16			8		28	
	<i>Итого по модулю 3:</i>					8		28	
<b>Модуль 4. Подготовка к экзамену</b>									
	<b>Подготовка к экзамену</b>	9	17					<b>36</b>	
	<b>ИТОГО:</b>	9	1-17	6		26		112	<b>144</b>

#### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

##### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

## **Модуль 1. Численные методы решения типичных задач для параболических уравнений**

### **Тема 1. Основные понятия теории разностных схем.**

Введение основных понятий теории разностных схем (сетка, узел, шаблон, аппроксимация, устойчивость, сходимость), применяемых для решения уравнений математической физики численными методами. Основная теорема о сходимости разностной схемы.

### **Тема 2. Метод сеток решения типичных задач для уравнений параболического типа.**

Аппроксимация задачи Коши и смешанной граничной задачи для уравнения теплопроводности с помощью явной и неявной двухслойных разностных схем, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость.

## **Модуль 2. Метод сеток решения типичных задач для уравнений Пуассона и Лапласа**

### **Тема 3. Метод сеток решения типичных задач для уравнений Пуассона и Лапласа**

Аппроксимация уравнений Пуассона и Лапласа методом сеток. Аппроксимация граничных условий. Разностная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле в прямоугольнике, устойчивость разностной схемы. Численные методы матричной прогонки и итерационный процесс Либмана решения разностной схемы.

### **Модуль 3. Метод сеток решения типичных задач для уравнений колебания струны**

### **Тема 4. Метод сеток решения типичных задач для уравнений колебания струны**

Разностная схема, аппроксимирующая задачу Коши и смешанную граничную задачу для уравнения колебания струны, порядок аппроксимации. Алгоритм решения разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши и смешанную граничную задачу для уравнения колебания струны. Устойчивость разностной схемы.

## **4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине**

### **Лабораторные занятия**

№ п/п	Тема	Аудиторные часы
-------	------	-----------------

	<b>Модуль 1. Лабораторные занятия по теме: <u>Разностные схемы для параболических уравнений</u></b>	<b>8</b>
1.1лб	Алгоритмы решения задачи Коши и смешанной граничной задачи для параболического уравнения с помощью явной двухслойной разностной схемы	2
1.2лб	Алгоритмы решения задачи Коши и смешанной граничной задачи для параболического уравнения с помощью неявной двухслойной разностной схемы	2
1.3лб	Решение задачи Коши для параболического уравнения с помощью явной двухслойной разностной схемы	2
1.4лб	Решение задачи Коши для параболического уравнения с помощью неявной двухслойной разностной схемы	2
	<b>Модуль 2. Лабораторные занятия по теме: <u>Разностные схемы для параболических уравнений</u></b>	<b>10</b>
1.5лб	Решение смешанной граничной задачи для параболического уравнения с помощью явной двухслойной разностной схемы	2
1.6лб	Решение смешанной граничной задачи для параболического уравнения с помощью неявной двухслойной разностной схемы	2
1.7лб	Обсуждение результатов лабораторной работы- <b><u>зачет по работе</u></b>	2
2.1лб	Алгоритм метода матричной прогонки решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона	2
2.2лб	Алгоритм итерационного метода Либмана решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона	2
	<b>Модуль 3. Лабораторные занятия по теме: <u>Разностные схемы для параболических уравнений</u></b>	<b>8</b>
2.3лб	Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом матричной прогонки	2
2.4лб	Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике итерационным методом Либмана	2

2.5лб	Сравнение по точности метода матричной прогонки и итерационного метода Либмана	2
2.6лб	Обсуждение результатов лабораторной работы- <u>зачет</u> <u>по работе</u>	2

## 5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. Параллельно материал транслируется на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации слайд-презентаций).

Для проведения лабораторных занятий на факультете имеются 4 компьютерных класса, оснащенные современными компьютерами с необходимым программным обеспечением. Студенты имеют свободный доступ к интернет-ресурсам. Университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

### 6.1. Виды и порядок выполнения самостоятельной работы

1. Изучение рекомендованной литературы.
2. Решение задач.
3. Выполнение лабораторных работ.
4. Подготовка к коллоквиуму.

№	Виды самостоятельной работы	Вид контроля	Учебно-методич. обеспечения
1	Изучение	Устный опрос по	См. разделы 8, 9

	рекомендованной литературы	разделам дисциплины	данного документа
2	Решение задач	Проверка домашнего задания	См. разделы 8, 9 данного документа
3	Выполнение лабораторных работ	Зачет по лабораторной работе	См. разделы, 8, 9 данного документа
4	Подготовка к коллоквиуму	Промежуточная аттестация в форме ответов на заранее объявленные вопросы	См. разделы, 8, 9 данного документа

**Задачи для самостоятельного решения по теме:  
«Метод сеток для параболических уравнений»**

**1. Задача Коши**

1.1. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.2, 0.01)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - 2, \\ u(x, 0) = x^2 + 1. \end{cases}$$

1.2. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.2, 0.01)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = x^2 + x. \end{cases}$$

1.3. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.2, 0.02)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10t - \frac{1}{2}, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

1.4. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной

разностной схемы найти значение  $u(0.2, 0.04)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x - 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

1.5. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.2, 0.02)$ , где  $u(x, t)$  – решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

В ответах сохранять по 3 десятичных знака.

## 2. Смешанная граничная задача

2.1. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.1, 0.02)$ , где  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3x - 1, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = x^2 + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 2 - 3t, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2.2. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.1, 0.08)$ , где  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x - 1, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = 2x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 3 - t, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2.3. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.1, 0.02)$ , где  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t - 1, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = t^2 - t + 1, \quad u(1, t) = t^2 - t + 2, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2.4. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.1, 0.02)$ , где  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - 1, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 2 + 2t, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2.4. Методом сеток с шагом  $h$  с помощью явной двухслойной разностной схемы найти значение  $u(0.1, 0.02)$ , где  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3x + 2, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = -x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 3t - 1, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

В ответах сохранять по 3 десятичных знака.

### Ответы к самостоятельной работе по числ.методам умф для магистрантов

1.1.  $u = x^2 + xt + 1, \quad u(0.2, 0.01) = 1.042.$

1.2.  $u = x^2 + x + t, \quad u(0.2, 0.01) = 0.250.$

1.3.  $u = x^2 + 5t^2, \quad u(0.2, 0.02) = 0.042.$

1.4.  $u = x^2 - xt, \quad u(0.2, 0.04) = 0.032.$

1.5.  $u = x^2 + t, \quad u(0.2, 0.02) = 0.060.$

2.1.  $u = x^2 - 3xt + x, \quad u(0.1, 0.02) = 0.104.$

2.2.  $u = 2x^2 - xt + 1, \quad u(0.1, 0.08) = 1.012.$

2.3.  $u = t^2 - t + x + 1, \quad u(0.1, 0.02) = 1.080.$

2.4.  $u = x^2 + 2xt + 1, \quad u(0.1, 0.02) = 1.014.$

2.5.  $u = -x^2 + 3xt, \quad u(0.1, 0.02) = -0.034.$

Решения этих задач, оформленные на отдельных листочках или тетрадях, представить на кафедру прикладной математики. Максимальное количество баллов-20

Литература для выполнения самостоятельной работы: рекомендованная к данному курсу основная [2], [3] и дополнительная литература [8], конспекты лекций.

По каждой выполненной лабораторной работе необходимо написать отчет и представить на кафедру прикладной математики. Преподаватель, убедившись, что лабораторная работа выполнена самостоятельно и верно, проверив отчет, выставляет соответствующие баллы. Максимальное количество баллов-20.

Задания для лабораторных работ и необходимый методический и теоретический материал содержатся в пособиях [2], [3], [5], [6], указанных в списке учебной литературы в разделе 8..

## **7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### **7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.**

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

<b>Код компетенции из ФГОС ВО</b>	<b>Код и наименование индикатора достижения компетенций (в соответствии с ПООП (при наличии))</b>	<b>Планируемые результаты обучения</b>	<b>Процедура освоения</b>
ПК-1	способность проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива	<b>Знает:</b> классические методы исследования сходимости разностных схем; <b>Умеет:</b> доказывать сходимость разностных схем, аппроксимирующих типичные задачи для уравнений матфизики; <b>Владеет:</b> навыками самостоятельно решать	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов и контрольных работ

		практические задачи	
ПК-2	способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	<b>Знает:</b> основные приемы доказательства сходимости разностных схем, аппроксимирующих типичные задачи для уравнений матфизики; <b>Умеет:</b> осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности разработанных методов. <b>Владеет:</b> навыками самостоятельно применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов и контрольных работ

## 7.2. Типовые контрольные задания

### 1 ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x + t) \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 + t^2,$$

$$u(x, 0) = x.$$

46

2. Определить порядок аппроксимации задачи Дирихле в области  $D\{0 < x < 1, 0 < y < 2\}$  с границей  $\Gamma$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (x^2 + y^2 + 1)u = 1, \quad (x, y) \in D$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

разностной схемой

$$\frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} - (x_m^2 + y_n^2 + 1) \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{2} = 1$$

$$(x_m, y_n) \in D_h^0, \quad x_m = mh, \quad y_n = nl.$$

$$u_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad (x_m, y_n) \in \Gamma_h,$$

где  $D_h^0, \Gamma_h$  – внутренняя сеточная область и сеточная граница соответственно. 96

3. Пусть  $u(x, t)$  – решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt - 2,$$

$$u(x, 0) = x^2.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.2; 0.01)$ . 96

4. Пусть  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x + 2, \quad 0 < x < 0.2, \quad 0 < t \leq 0.02,$$

$$u(x, 0) = -x^2,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(0.2, t) = 0.4t - 0.04.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.2; 0.01)$ . 86

## 2 ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (x + y^2 + 1)u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u|_{\Gamma} = xy + \sin x, \quad (x, y) \in T, \quad \text{где } \Gamma \text{ – граница области.} \quad \text{46}$$

2. Определить порядок аппроксимации задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{xt},$$

$$u(x, 0) = x + 1$$

разностной схемой относительно  $h$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{e^{x_{m+1}t_n} + e^{x_{m-1}t_n}}{2}, \quad m=0, \pm 1, \dots \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$u_m^0 = x_m + 1, \quad m=0, \pm 1, \dots$$

$$x_m = mh, \quad t_n = n\tau, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

96

3. Пусть  $u(x, t)$  – решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,$$

$$u(x, 0) = -x.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.2; 0.01)$ . 96

4. Пусть  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t + 2, \quad 0 < x < 0.2, \quad 0 < t \leq 0.01,$$

$$u(x, 0) = -x^2,$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(0.2, t) = t^2 - 0.04.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.1; 0.01)$ . 86

### 3 ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = x^2 + y^2 + 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

46

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = 1 + x, \quad u(0, y) = y, \quad u(1, y) = 1 + y.$$

2. Определить порядок аппроксимации относительно  $h$  смешанной граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2e^{xt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin xt, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.2.$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = t + 1.$$

разностной схемой

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = 2e^{x_m t_n} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{\sin(x_{m+1} t_n) + \sin(x_{m-1} t_n)}{2}, \\ m = \overline{1, M-1}; n = \overline{1, N-1}, \\ u_m^0 = 0, \quad m = \overline{0, M}, \\ u_0^n = t_n, \quad u_M^n = t_n + 1, n = \overline{0, N}. \end{array} \right.$$

где  $x_m = mh$ ,  $t_n = n\tau$ , если  $\tau \leq \frac{h^2}{2 \max e^{xt}}$ .

96

3. Пусть  $u(x, t)$  – решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x + t - 1),$$

$$u(x, 0) = x^2.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.1; 0.01)$ .

96

4. Пусть  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad 0 < x < 0.2, \quad 0 < t \leq 0.01,$$

$$u(x, 0) = x,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(0.2, t) = t + 0/2.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.2; 0.01)$ .

86

#### 4 ВАРИАНТ

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - (x + y)u + 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

46

2. Определить порядок аппроксимации задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - e^{x+t}u, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2$$

разностной схемой

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - e^{x_m+t_n} \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}, \quad m=0, \pm 1, \dots \quad n=1, 2, \dots$$

$$u_m^0 = x_m^2, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_m = mh, \quad t_n = n\tau, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad \tau \leq \alpha_0 h^2, \quad \alpha_0 \equiv \text{const} > 0.$$

96

3. Пусть  $u(x, t)$  – решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x-1),$$

$$u(x, 0) = x^2.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.1; 0.01)$ .

96

4. Пусть  $u(x, t)$  – решение смешанной граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad 0 < x < 0.2, \quad 0 < t \leq 0.01,$$

$$u(x, 0) = -x^2,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(0.2, t) = t - 0.04.$$

Методом сеток, пользуясь явной двухслойной разностной схемой, найти приближенно  $u(0.2; 0.01)$ .

86

### Вопросы к экзамену:

1. Основные понятия теории разностных схем: сетка, шаг сетки, узлы сетки, шаблон, разностная схема, аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости.

2. Основная теорема о сходимости решения разностной схемы.

3. Разностная схема, аппроксимирующая задачу Коши для уравнения теплопроводности со вторым порядком, необходимое условие устойчивости, алгоритм вычислений по этой схеме.

4. Разностная схема, аппроксимирующая смешанную граничную

задачу для уравнения теплопроводности со вторым порядком, необходимое условие устойчивости, алгоритм вычислений по этой схеме.

5. Аппроксимация разностной схемой задачи Дирихле со вторым порядком в прямоугольнике  $D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ .

6. Сходимость разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле в прямоугольнике со вторым порядком.

7. Методы матричной прогонки и итерационный процесс Либмана решения разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле в прямоугольнике  $D$  со вторым порядком.

8. Разностная схема, аппроксимирующая задачу Коши для уравнения колебания струны, порядок аппроксимации.

9. Разностная схема, аппроксимирующая смешанную граничную задачу для уравнения колебания струны, алгоритм реализации на ЭВМ.

10. Необходимое условие устойчивости разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения колебания струны.

### **Примерные вопросы устного опроса по теме 2**

1. Составить методом сеток явные и неявные разностные схемы, аппроксимирующие задачу Коши и смешанную граничную для уравнений параболического типа.
2. Алгоритмы решения задачи Коши и смешанной граничной задачи с помощью явной и неявной разностных схем.
3. Определить порядок аппроксимации разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши или смешанной граничной задачи.
4. Необходимые и достаточные условия устойчивости явных и неявных разностных схем для уравнений параболического типа.

### **Примерные вопросы устного опроса по темам 3, 4**

5. Алгоритм решения задачи Дирихле и задачи Неймана методом матричной прогонки.

6. Алгоритм решения задачи Дирихле и задачи Неймана итерационным методом Либмана.
7. Необходимое условие устойчивости явной трехслойной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения колебания струны.
8. Необходимое условие устойчивости явной трехслойной разностной схемы, аппроксимирующей смешанную граничную задачу для уравнения колебания струны.
9. Разностная схема, аппроксимирующая смешанную граничную задачу для уравнения колебания струны, алгоритм реализации на ЭВМ.

**7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 30 % и промежуточного контроля – 70 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 10 баллов,
- самостоятельная работа – 10 баллов,

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

-зачет по каждой лабораторной работе – 20 баллов (всего 20x2=40 баллов)

- письменная контрольная работа – 30 баллов.

Итоговый контроль:

- экзамен - 100 баллов.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### а) основная литература

- [1]. Зализняк В.Е. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков и инженеров [Электронный ресурс] / В.Е. Зализняк. — Электрон. текстовые данные. — Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2006. — 264 с. — 5-93972-482-5. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/16588.html> (16.06.2018)
- [2]. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы, и т.д. М.: Наука, 1977, 400 с.
- [3]. Сборник задач под редакцией П.И. Монастырского, Минск, 1983, 288 с.
- [4]. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Лань, 2009, 608 с.
- [5]. Абдурагимов Э.И., Бейбалаев В.Д. Метод сеток решения уравнений параболического типа. Лабораторные задания и методические указания по численным методам, Махачкала, 2010.
- [6]. Абдурагимов Э.И. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Лабораторные задания и методические указания по численным методам, Махачкала, 2010.

### б) дополнительная литература

- [7]. Лапчик М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К. Численные методы. Academia, 2009, 384 с.
- [8]. Пирумов У. Г. Численные методы. Дрофа, 2004, 223 с.
- [9]. Воробьев Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по численным методам. М.: Высш. шк., 1990, 308 с.
- [10]. Гуржий А. Численные методы математической физики. Курс лекций, 2006, 100 с..

## **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

1. Федеральный портал российское образование <http://edu.ru>;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета <http://elib.dgu.ru/?q=node/256>;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://catalog.iot.ru/index.php>;
4. Электронная библиотека <http://elib.kuzstu.ru>.

#### **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Для успешного освоения курса студентам рекомендуется самостоятельно повторять материал, пройденный во время лекций с подробным разбором доказательств теорем. Рекомендуется самостоятельно изучать по рекомендованной литературе программный материал и научиться применять на практике изученный материал, составлять алгоритмы решения задач и по ним составлять программы для решения этих задач на компьютере, изучать кроме рекомендованной и научную литературу, также пользоваться интернет - ресурсами. Рекомендуется научиться работать с прикладными программами.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: различные пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.), а также интернет-ресурсы.

#### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и дисплейные классы факультета с современными компьютерами, к которым имеется необходимое программное обеспечение.