

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

**Рабочая программа дисциплины**  
**Методы решения больших систем линейных**  
**алгебраических уравнений**  
Кафедра прикладной математики факультета математики и  
компьютерных наук

**Образовательная программа**  
**01.04.02 - Прикладная математика и информатика**

Профиль подготовки  
**Математическое моделирование и**  
**вычислительная математика**

Уровень высшего образования  
**Магистратура**

Форма обучения  
**Очная**

Статус дисциплины: **Вариативная по выбору**

Махачкала, 2018



Рабочая программа дисциплины «**методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений**» составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика (уровень магистратура) от 28.08. 2015 г. N 911.

Разработчик:

кафедра прикладной математики, Абдурагимов Э.И., к.ф.-м. н., доцент.

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от 27.04.2018, протокол № 8;

зав. кафедрой: \_\_\_\_\_ Кадиев Р.И.

и

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных от 27.06.2018, протокол №6;

председатель: \_\_\_\_\_ Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. \_\_\_\_\_

(подпись)

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений» входит в *вариативную* часть по выбору образовательной программы *магистратуры* по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с различными методами решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, усвоением наиболее распространенных из них численных методов решения СЛАУ, а также знакомством с современными направлениями развития эффективных методов решения СЛАУ.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
 профессиональных – ПК-2, ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме устного опроса, контрольных работ, зачета по лабораторным работам и промежуточный контроль в форме зачета.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет по лаб. работам, контрольная работа, экзамен)
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации				
1	108	6	26				76	зачет

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Методы решения больших СЛАУ» являются: усвоение различных методов решения СЛАУ большой размерности, научить самостоятельно решать СЛАУ большой размерности, пользуясь ЭВМ; привить обучающимся умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по математике, развить у них математический стиль мышления. Конечная цель изучения этой дисциплины — стать специалистом по решению СЛАУ большой размерности.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина относится к дисциплине по выбору вариативной части. Предполагает знание основ теории линейной алгебры, знание численных методов решения СЛАУ и умение применять их для нахождения решений задач линейной алгебры, умение пользоваться различными пакетами прикладных программ для этой цели. Магистр, изучив эту дисциплину, должен научиться составлять алгоритмы решения СЛАУ большой размерности, пользуясь изученными методами, и реализовать их на ЭВМ. При составлении математических моделей различных экономических и физических задач могут возникать СЛАУ большой размерности. Поэтому умение решать СЛАУ большой размерности полезно магистру как специалисту по направлению математическое моделирование вычислительная математика.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

<b>ПК-2</b>	Способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных	<b>Знает:</b> основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами. <b>Умеет:</b> применять к решению СЛАУ основные методы решения СЛАУ с разреженными
-------------	--	--

	проблем и задач	матрицами. <b>Владеет:</b> навыками применения современного математического аппарата исследовательской и прикладной деятельности.
<b>ПК-3</b>	Способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проективно-технологической деятельности.	<b>Знает:</b> основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами. <b>Умеет:</b> составлять алгоритмы и соответствующие программы для решения на компьютере СЛАУ с разреженными матрицами. <b>Владеет:</b> практическим навыками решения СЛАУ с разреженными матрицами.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов и зачет.

4.2. Структура дисциплины

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Контроль самост. раб.		
<b>Модуль 1. Неитерационные методы решения больших разреженных СЛАУ</b>									
1	Хранение и обработка разреженных матриц	9	1-2	2		2		6	опрос

2	Решение больших разреженных СЛАУ методами LU-факторизации	9	3-6	2		8		16	опрос, самостоятельная работа
	<i>Итого по модулю 1:</i>			4		10		22	<b>36</b>
3	<b>Модуль 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом ILU-факторизации</b>								
	Решение больших разреженных СЛАУ методом ILU-факторизации	7-11				8		28	
	<i>Итого по модулю 2:</i>					8		28	<b>36</b>
	<b>Модуль 3. Итерационные методы решения больших разреженных СЛАУ</b>								
4	Классические итерационные методы и релаксация	9	9-16	2		8		26	Домашняя контрольная работа
	<i>Итого по модулю 2:</i>			2		8		26	<b>36</b>
	<b>ИТОГО:</b>		1-16	6		26		76	<b>108</b>

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### *Модуль 1. Неитерационные методы решения больших разреженных СЛАУ*

##### **Тема 1. Хранение и обработка разреженных матриц.**

Портрет разреженной матрицы, виды портретов. Способы хранения разреженных матриц. Умножение разреженной матрицы на вектор.

##### **Тема 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом LU-факторизации.**

Разложение матрицы с помощью LU-факторизации. Решение большой системы линейных алгебраических уравнений с разреженной нижней треугольной матрицей. Решение большой системы линейных алгебраических

уравнений с разреженной верхней треугольной матрицей. Недостатки метода LU-факторизации. Решение СЛАУ с разреженной матрицей с помощью метода LU факторизации.

***Модуль 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом ILU-факторизации***

**Тема 2. Решение больших разреженных СЛАУ методом I LU-факторизации.**

Разложение матрицы с помощью ILU-факторизации. Свойства ILU-факторизации. Решение СЛАУ с разреженной матрицей с помощью метода ILU-факторизации. Преимущество метода ILU-факторизации перед методом LU-факторизации.

***Модуль 3. Итерационные методы решения больших разреженных СЛАУ***

**Тема 3. Классические итерационные методы и релаксация.**

Классические итерационные методы и релаксация. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя, их сходимость. Релаксационные методы, ускорение их сходимости.

***4.3.2. Содержание лабораторно-практических занятий по дисциплине***

**Лабораторные занятия**

№ п/п	Тема	Аудиторные часы
1	<b><i>Модуль 1. Лабораторные занятия по теме: Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами методом LU-факторизации</i></b>	<b>8</b>
1.1лб	Два способа умножения разреженной матрицы на вектор.	2
1.2 лб	Выполнение на компьютере умножения разреженной матрицы на вектор	2
1.3лб	LU-факторизация, формулы, алгоритм.	2
1.4лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами методом LU-факторизации.	2
2	<b><i>Модуль 2. Лабораторные занятия по теме:</i></b>	<b>10</b>

	<b><i>Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами методом ILU-факторизации</i></b>	
2.1лб	ILU-факторизация, формулы, алгоритм.	2
2.2лб	Разложение большой разреженной матрицы методом ILU-факторизации.	2
2.3лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами на компьютере методом ILU – факторизации.	2
2.4лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами на компьютере методом ILU – факторизации.	2
2.5лб	Сравнение методов LU-факторизации и ILU – факторизации. <b>Зачет по работе.</b>	2
3	<b><i>Модуль 3. Лабораторные занятия по теме: Итерационные методы и метод релаксации решения больших СЛАУ.</i></b>	<b>8</b>
3.1лб	Метод простой итерации решения разреженных СЛАУ	2
3.2 лб	Метод Гаусса-Зейделя, формулы, алгоритм.	2
3.3лб	Решение больших СЛАУ с разреженными матрицами на компьютере итерационными методами.	2
3.4лб	Сравнение по точности итерационных методов Якоби и Гаусса-Зейделя. <b>Зачет по работе.</b>	2

## 5. Образовательные технологии

Для проведения лабораторных занятий на факультете имеются 4 компьютерных класса, оснащенные современными компьютерами с необходимым программным обеспечением. Студенты имеют свободный доступ к интернет-ресурсам. Университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

### 6.1. Виды и порядок выполнения самостоятельной работы

1. Изучение рекомендованной литературы.
2. Решение задач домашней самостоятельной работы.
3. Выполнение лабораторных работ.
4. Подготовка к коллоквиуму.

№	Виды самостоятельной работы	Вид контроля	Учебно-методич. обеспечения
1	Изучение рекомендованной литературы	Устный опрос по разделам дисциплины	См. разделы 8, 9 данного документа
2	Решение задач домашней самостоятельной работы	Оценка выполненной работы	См. разделы 8, 9 данного документа
3	Выполнение лабораторных работ	Зачет по лабораторной работе	См. разделы, 8, 9 данного документа
4	Подготовка к коллоквиуму	Промежуточная аттестация в форме ответов на заранее объявленные вопросы	См. разделы, 8, 9 данного документа

### Задания

для самостоятельной работы по методам решения больших СЛАУ

I. Даны разреженные матрицы

#### Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \\ -1 & 0 & 9 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

#### Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 1 & 0 & 10 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

### Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 12 & 0 & 0 & 0 & 14 & 7 \\ 3 & 0 & 12 & 8 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 13 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- 1) Выписать портреты этих матриц .
- 2) Симметричны ли их портреты?
- 3) Выписать для хранения этих матриц способом CSR массивы *aelem*, *jptr*, *iptr*.
- 4) Выписать для хранения этих матриц способом CSR с изменениями массивы *adiag*, *altr*, *autr*, *jptr*, *iptr*.

**II.** Написать алгоритм и соответствующую программу умножения матриц  $A$  и  $B$  на векторы  $x$  и  $y$  соответственно. Результаты проверить на векторах

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- III.** 1) Найти разложение матрицы  $A$  методом  $LU$  –факторизации.  
 2) Найти разложение матрицы  $A$  методом  $ILU$  –факторизации.  
 3) Описать недостатки и достоинства методов  $LU$  и  $ILU$ - факторизаций.  
 4) Решить методом  $ILU$  –факторизации систему  $Ax = b^T$ , где

**Вариант 1:**  $b = (6, -3, -5, 28, -6, -11, 20)$ .

**Вариант 2:**  $b = (7, -2, -3, 31, -8, -14, 23)$ .

**Вариант 3:**  $b = (9, 0, -1, 25, -12, -20, 31)$ .

Отчет по этой самостоятельной работе представить на кафедру прикладной математики до 10-го ноября. Максимальное количество баллов – 20.

Литература для выполнения самостоятельной работы: рекомендованная к данному курсу основная [2] и дополнительная литература [6], конспекты лекций.

**7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

**7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.**

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Код компетенции из ФГОС ВО	Код и наименование индикатора достижения компетенций (в соответствии с ПООП (при наличии))	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОК-1	Способность к абстрактному мышлению анализу, синтезу.	<p><b>Знает:</b> о необходимости применения особых методов решения СЛАУ с разреженными матрицами.</p> <p><b>Умеет:</b> анализировать основные решения СЛАУ с разреженными матрицами.</p> <p><b>Владеет:</b> способностью анализировать основные решения СЛАУ с разреженными матрицами.</p>	Изучение тем последовательно по модулям с последующим выполнением лабораторных работ
ПК-2	Способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач.	<p><b>Знает:</b> основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами.</p> <p><b>Умеет:</b> применять к решению СЛАУ основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами.</p> <p><b>Владеет:</b></p>	Зачеты по лабораторным работам, отчет по самостоятельной работе

		практическими навыками составления алгоритмов основных методов решения СЛАУ с разреженными матрицами.	
ПК-3	Способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проективно-технологической деятельности.	<b>Знает:</b> основные методы решения СЛАУ с разреженными матрицами. <b>Умеет:</b> составлять алгоритмы и соответствующие программы для решения на компьютере СЛАУ с разреженными матрицами. <b>Владеет:</b> практическим навыками решения СЛАУ с разреженными матрицами.	Зачеты по лабораторным работам, устный опрос.

## 7.2. Типовые контрольные задания

### Типовая контрольная работа

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \\ -1 & 0 & 9 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- 1) Найти разложение матрицы  $A$  методом  $LU$  –факторизации.
- 2) Найти разложение матрицы  $A$  методом  $ILU$  –факторизации.
- 3) Решить методом  $ILU$  –факторизации систему  $Ax = b^T$ , где  $b = (6, -3, -5, 28, -6, -11, 20)$ .

## **I. Примерные вопросы к зачету**

### **Примерные вопросы по модулю 1**

1. Что называется портретом разреженной матрицы?
2. Деление матриц по соответствующим портретам.
3. Распространенный способ хранения несимметричных матриц, продемонстрировать на примере.
4. Хранение матрицы с симметричным портретом и ненулевой главной диагональю, продемонстрировать на примере.
5. Алгоритм матрично-векторного умножения.
6. Симметричность портрета при учете краевых условий.
7. Прямой и обратный ход по разреженным треугольным матрицам.

### **Примерные вопросы по модулю 2**

1. Что такое LU-факторизация? Объяснить почему невыгодно применять LU-факторизацию к большим разреженным матрицам.
2. Что такое ILU-факторизация? Алгоритм ILU-факторизации.
3. Продемонстрировать на примере реализацию алгоритма ILU-факторизации.
4. ILU-факторизация в случае симметричной матрицы, алгоритм, демонстрация на примере.
5. Программа реализации на ЭВМ ILU-факторизации.

### **Примерные вопросы по модулю 3**

1. Итерационный метод Якоби решения СЛАУ, алгоритм метода.
2. Метод, основанный на расщеплении матрицы, алгоритм метода.
3. Теорема о сходимости метода, основанного на расщеплении матрицы.
4. Метод последовательной верхней релаксации, алгоритм метода.
5. Сравнение методов Якоби и Гаусса-Зейделя с методом последовательной верхней релаксации

## **II. Отчеты по выполненным лабораторным работам.**

### **7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 30 % и промежуточного контроля – 70 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 10 баллов,
- сдача коллоквиума – 10 баллов,

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- зачет по каждой лабораторной работе – 25 баллов (всего  $25 \times 2 = 50$  баллов),
- Домашняя самостоятельная работа – 20 баллов.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

а) основная литература:

[1]. Веретенников В.Н. Методические указания. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Индивидуальное домашнее задание [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Н. Веретенников. — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Российский государственный гидрометеорологический университет, 2004. — 25 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12499.html> (16.06.2018)

[2]. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000, 70 с.

[3]. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М: Физматгиз, 1975, 228 с.

б) дополнительная литература

- [4]. *Аббафи Й., Спедикато Э.* Математические методы для линейных и нелинейных уравнений: проекционные ABS алгоритмы. М.: Мир, 1996, 268 с.
- [5]. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999, 548 с.
- [6]. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988, 410 с.
- [7]. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing Company, 2003, 528 с.

#### **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

1. Федеральный портал российское образование <http://edu.ru>;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета <http://elib.dgu.ru/?q=node/256>;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://catalog.iot.ru/index.php>;
4. Электронная библиотека <http://elib.kuzstu.ru>.

#### **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Для успешного освоения курса студентам рекомендуется самостоятельно повторять материал, пройденный во время лекций с подробным разбором доказательств теорем. Рекомендуется самостоятельно изучать по рекомендованной литературе программный материал и научиться применять на практике изученный материал, составлять алгоритмы решения задач и по ним составлять программы для решения этих задач на компьютере, изучать кроме рекомендованной и научную литературу, также пользоваться интернет - ресурсами. Рекомендуется научиться работать с прикладными программами.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая**

**перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: различные пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.), а также интернет-ресурсы.

**12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и дисплейные классы факультета с современными компьютерами, к которым имеется необходимое программное обеспечение.