



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка Кафедра прикладной математики факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа
01.03.02-прикладная математика и информатика

Профиль подготовки
Математическое моделирование и вычислительная математика

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: ***Вариативная по выбору***

Махачкала, 2018

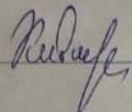
Рабочая программа дисциплины *Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка* составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от «12» марта 2015г. №228.

Разработчик:

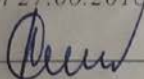
кафедра прикладной математики, Бейбалаев В.Д., к.ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:

На заседании кафедры прикладной математики от 25 июня 2018 г.,
протокол № 10.

Зав. кафедрой  Кадиев Р.И.

На заседании Методической Совета факультета математики и компьютерных наук от 27.06.2018 г., протокол № 6 .

Председатель  Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа согласована с учебно-методическим управлением

«28» 06 2018 г. 

Рабочая программа дисциплины *Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка* составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от «12» марта 2015г. №228.

Разработчик:

кафедра прикладной математики, Бейбалаев В.Д., к.ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:

На заседании кафедры прикладной математики от 25 июня 2018 г., протокол № 10.

Зав. кафедрой _____ *Кадиев Р.И.*

На заседании Методической Совета факультета математики и компьютерных наук от 27.06.2018 г., протокол № 6 .

Председатель _____ *Бейбалаев В.Д.*

Рабочая программа согласована с учебно-методическим управлением

«_____» _____ 2018 г. _____

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка входит в вариативную по выбору часть образовательной программы *бакалавра* по направлению 01.03.02 – Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с численными методами решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка и освоением численных методов решения задач для дифференциальных уравнений дробного порядка.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных –ОПК-1, профессиональных- ПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, лабораторные работы и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме контрольных и лабораторных работ и промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия							Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	в том числе							
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС, в том числе экзамен	
		из них						
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации		
6	108	16	32				60	Экзамен
Итого:	108	16	32				60	

1. Цели освоения дисциплины

Цель изучения курса «Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка» - владение студентами навыков численного решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, разработки алгоритмов численного решения математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка и умение проводить расчетно-графические работы.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка» входит в вариативную часть образовательной программы *бакалавра* по направлению подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика.

Курс «Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка» вводится после изучения дисциплин алгебра, информатика, математический анализ, дифференциальные уравнения, так как для успешного усвоения этого курса студентам необходимы знания по указанным дисциплинам.

Изученные в курсе численные методы могут использовать при численном моделировании различных нелокальных процессов естествознании.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Знает фундаментальные основы естественных наук, математики, информатики, дробного исчисления и основы математического моделирования Умеет : совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении практических задач. Владеет навыками численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка и разработки алгоритмов и программ для численного расчета.
ПК-2	способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Знает математические методы моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов. Умеет совершенствовать и применять современный математический аппарат

		при разработке моделей различных физических, биологических, химических и экономических процессов. Владеет навыками численного решения дробных дифференциальных уравнений и моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов, описываемых дробными дифференциальными уравнениями
--	--	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы 108 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)				
				Лекции	Практические	Лаб. Раб.	Сам. раб	
Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка								
1	Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля. Дробная производная Caputo, аппроксимация дробной производной Caputo. Дробная производная Грюнвальда-Летникова.	6	1	2		2	2	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.
2	Приближенное вычисление производных дробного порядка	6	2-4	2		6	4	-----

3	Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка и их численное решение	6	5-7	2		8	4	Индивидуальный фронталь-ный опрос, лабораторная работа.
4	Порядок точности и сходимость численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка	6	8	2			2	-----
Итого по модулю 1:				8		16	12	
Модуль 2. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка								
5	Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка.	6	9	2		2	2	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.
6	Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной		10-11	2		4	2	
7	Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка.	6	12-14	2		6	4	-----
8	Численные методы решения краевых задач для двумерного уравнения теплопроводности с	6	15-16	2		4	4	-----

	производной дробного порядка.						
Итого по модулю 2:				8		16	12
Итого по 6 семестру:				16		32	24
Модуль 3. Подготовка к экзамену							
Подготовка к экзамену						36	
ИТОГО:				16		32	60

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка

Тема 1. Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля. Дробная производная Caputo, аппроксимация дробной производной Caputo. Дробная производная Грюнвальда-Летникова. Определения дробного интеграла и производной Римана-Лиувилля и их свойства. Дробная производная Римана-Лиувилля на оси и полуоси. Дробные производные высших порядков. Примеры вычислений дробных интегралов и производных.

Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной. Аппроксимация дробной производной Caputo, порядок аппроксимации.

Определение дробной производной Грюнвальда-Летникова. Связь между дробной производной Римана-Лиувилля и дробной производной Грюнвальда-Летникова. Формулы Грюнвальда-Летникова для приближенного вычисления дробной производной.

Тема 2. Приближенное вычисление производных дробного порядка. Аппроксимация дробной производной Римана-Лиувилля, порядок аппроксимации. Примеры приближенных вычислений дробных производных.

Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка и их численное решение. Некоторые специальные функции. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка. Задача типа Коши. Существование и единственность решения задачи типа Коши. Численные методы решения задачи типа Коши. Порядок аппроксимации разностной схемы. Алгоритм численного решения задачи типа Коши.

Тема 4. Порядок точности и сходимость численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка. Порядок точности разностной схемы аппроксимирующей задачу Коши для ОДУ дробного порядка и сходимость. О зависимости сходимости разностных методов решения задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка от шага.

Модуль 2. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка

Тема 5. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка.

Частные производные дробного порядка, аппроксимация, порядок аппроксимации. Краевая задача для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка.

Тема 6. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной

. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, порядок точности и сходимость.

Тема 7. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка. Аппроксимация двусторонней производной дробного порядка, порядок аппроксимации. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка, порядок точности, сходимость.

Тема 8. Численные методы решения краевых задач для двумерного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка. Аппроксимация частной производной дробного порядка, порядок аппроксимации. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, порядок точности, сходимость.

Лабораторные работы

№ п/п	Тема	Аудиторные часы
	Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка	16
лб. 1	Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля, Caputo, Грюнвальда-Летникова.	2
лб. 2	Приближенное вычисление производных дробного порядка	6
лб. 3	Обыкновенные дифференциальные дробного порядка и их численное решение	8
	Модуль 2. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка	16

лб. 4	Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка.	2
лб. 5	Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной	4
лб. 6	Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка.	6
лб. 7	Численные методы решения краевых задач для двумерного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка.	4

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. Параллельно материал транслируется на экран с помощью мультимедийного проектора. Семинарские занятия проводятся с использованием мела и меловой доски. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации слайд-презентаций).

Лабораторные работы проводятся в компьютерных классах с использованием меловой доски и мультимедийного проектора. Для проведения лабораторных занятий необходима аудитория, оснащенная компьютерами, мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации слайд-презентаций).

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

6.1. Виды и порядок выполнения самостоятельной работы

1. Изучение рекомендованной литературы.
2. Подготовка к отчетам по лабораторным занятиям.
3. Решение задач.
4. Подготовка к коллоквиуму.
5. Подготовка к экзамену.

№	Виды самостоятельной работы	Вид контроля	Учебно-методич. обеспечения
1	Изучение рекомендованной литературы	Устный опрос по разделам дисциплины	См. разделы 6.2, 7.2, 8, 9 данного документа
3	Решение задач	Проверка домашнего задания	См. разделы 6.2, 7.2, 8, 9 данного

			документа
4	Подготовка к коллоквиуму	Промежуточная аттестация в форме контрольной работы	См. разделы 6.2, 7.2, 8, 9 данного документа
5	Подготовка к экзамену	Устный опрос, либо компьютерное тестирование	См. разделы 6.2, 7.2, 8, 9 данного документа

Текущий контроль: проверка отчетов по лабораторным работам, защита.

Текущий контроль: проверка рефератов, решения задач из предложенного преподавателем списка.

Промежуточная аттестация: контрольные работы, коллоквиум.

Текущий контроль успеваемости осуществляется непрерывно, на протяжении всего курса. Прежде всего, это устный опрос по ходу практических и лабораторных занятий, выполняемый для оперативной активизации внимания студентов и оценки их уровня усвоения тем. Результаты устного опроса учитываются при выборе индивидуальных задач для решения. Каждую неделю осуществляется проверка выполнения заданий, как домашних, так и лабораторных.

Промежуточный контроль проводится в форме контрольной работы и коллоквиума, в которых содержатся практические задачи и теоретические вопросы.

Итоговый контроль проводится либо в виде устного экзамена (зачета), либо в форме тестирования.

Оценка «отлично» ставится за уверенное владение материалом курса.

Оценка «хорошо» ставится при полном выполнении требований к прохождению курса и умении ориентироваться в изученном материале.

Оценка «удовлетворительно» ставится при достаточном выполнении требований к прохождению курса и владении конкретными знаниями по программе курса.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если требования к прохождению курса не выполнены и студент не может показать владение материалом.

6.2. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.

Вопросы для самостоятельного изучения по конкретным разделам (модулям) приведены в п. 7.2 настоящей программы. Там же приведены темы рефератов и типовые контрольные работы по численным методам решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

Задания для проверочной работы, самостоятельной работы, домашние задания содержатся в пособиях, указанных в списке учебной литературы.

Методические разработки для выполнения работ имеются на кафедре ПМ и выдаются студентам методистом кафедры. Учебная литература (учебники, учебные пособия) и информационные ресурсы приведены в п. 8 настоящей "Программы".

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-1	способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Знает фундаментальные основы естественных наук, математики, информатики, дробного исчисления и основы математического моделирования Умеет: совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении практических задач. Владеет навыками численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка и разработки алгоритмов и программ для численного расчета.	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен
ПК-2	способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Знает математические методы моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов. Умеет совершенствовать и применять современный математический аппарат при разработке моделей различных физических, биологических, химических и экономических процессов. Владеет навыками численного решения дробных дифференциальных	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен

		уравнений и моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов, описываемых дробными дифференциальными уравнениями	
--	--	---	--

7.2. Типовые контрольные задания

Численные методы решения ОДУ дробного порядка

Вариант 1

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$\begin{cases} \partial_{0x}^{\alpha} y = \frac{y^2}{x^2 + 1} - (x-1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

при $\alpha = 0,5$ на отрезке $[0; 0,4]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Найти приближенное решение с шагом $h = 0,1$ на отрезке $[0; 0,5]$ при $\alpha = 0,5$

$$\begin{cases} D_{0x}^{\alpha} y = x(y-x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$\begin{cases} \partial_{0x}^{\alpha} y = \frac{y^2}{x+1} - x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

при $\alpha = 0,5$ на отрезке $[0; 0,5]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Найти приближенное решение задачи типа Коши с шагом $h = 0,05$ на отрезке $[0; 0,3]$ при $\alpha = 0,5$

$$\begin{cases} D_{0x}^{\alpha} y = xy - (x+1)^2 + 2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Ориентировочный перечень вопросов к зачету по всему курсу

1. Интегральное уравнение Абеля и его разрешимость в классе интегрируемых функций.
2. Определения дробного интеграла Римана-Лиувилля и его свойства.
3. Определение дробной производной на отрезке. Свойства.

4. Дробная производная на оси и полуоси.
5. Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной.
6. Дробная производная Грюнвальда-Летникова и ее свойства.
7. Аппроксимация дробной производной. Порядок аппроксимации.
8. ОДУ дробного порядка. Задача типа Коши для ОДУ дробного порядка. Существование и единственность решения.
9. Численное решение задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка.
10. Порядок точности и сходимость численного метода решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.

Ориентировочный перечень вопросов к экзамену по всему курсу

1. Интегральное уравнение Абеля и его разрешимость в классе интегрируемых функций.
2. Определения дробного интеграла Римана-Лиувилля и его свойства.
3. Определение дробной производной на отрезке. Свойства.
4. Дробная производная на оси и полуоси.
5. Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной.
6. Дробная производная Грюнвальда-Летникова и ее свойства.
7. Аппроксимация дробной производной. Порядок аппроксимации.
8. ОДУ дробного порядка. Задача типа Коши для ОДУ дробного порядка. Существование и единственность решения.
9. Численное решение задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка.
10. Порядок точности и сходимость численного метода решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.
11. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для ОДУ дробного порядка, порядок аппроксимации, порядок точности, сходимость.
12. Аппроксимация частной производной дробного порядка.
13. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, сходимость.
14. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка, сходимость.
15. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, сходимость.

Темы для самостоятельного изучения:

1. Дробная производная Рисса, аппроксимация, порядок аппроксимации. (см. [1-4] раздела 8)
2. Численное исследование математической модели

«фрактального» осциллятора, фазовая плоскость. (см. [5] раздела 8)

3. Линейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. (см. [3] раздела 8)
4. Нелинейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. (см. [3] раздела 8)
5. Нелинейное уравнение теплопроводности с дробными производными. (см. [5] раздела 8)

Темы для рефератов:

1. Математическая концепция фрактала. Фрактальная размерность.
2. Численное исследование нелокальной модели Дуффинга и его странные аттракторы.
3. Численное моделирование нелокальных процессов промерзания в средах с фрактальной структурой.

7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 30 % и промежуточного контроля – 70 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 20 баллов,
- участие на лабораторных занятиях - 20 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 60 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- лабораторная работа - 40 баллов,
- письменная контрольная работа - 60 баллов,

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

а) основная литература:

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск: Наука и Техника, 1987.- 688с. <http://www.read.in.ua/book140679/> (дата обращения 20.06.2018).
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000.- 299с. <http://www.read.in.ua/book139770/> (дата обращения 20.06.2018).
3. Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.- ИПЦ ДГУ.- 2012.- 85 с.

б) дополнительная литература:

4. Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шахбанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления. Palmarium Academic Publishing.-2012.-135 с.
5. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. -Вып. 6, 2008. -С.46-53.
6. Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И. А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования.- Вестник ДГУ, вып. 6.- 2014.- С. 53-61.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. Информационная система моделей [Электронный ресурс]: / Руководитель проекта Ризниченко Г. Ю. URL: <http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=53>.

«Дин

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Для успешного освоения курса студентам рекомендуется проводить самостоятельный разбор материалов лабораторных занятий в течении семестра. В случае затруднений в понимании и освоении каких-либо тем решать дополнительные задания из учебных пособий, рекомендуемых к данному курсу.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: пакеты для решения задач математического программирования: MathCAD и Mat LAB, объектно-ориентированное программирование в среде Delphi и C++.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

4 компьютерных класса на математическом факультете (40 компьютеров), оснащенных аудио и видеоаппаратурой.