МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Обобщенные функции

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

01.03.01 - Математика

Профиль подготовки

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Уровень высшего образования

бакалавриат

Форма обучения

очная

Статус дисциплины: **вариативная**

Махачкала, 2018

Рабочая программа дисциплины **«Обобщенные функции»** составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки *01.03.01 Математика (уровень бакалавриата)* от 7 августа 2014г. № 943

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Меджидов З. Г., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры ДУ и ФА от 31.05.2018 г., протокол № 10.

Зав. кафедрой ______________ Сиражудинов М.М.
(подпись)

на заседании Методической комиссии факультета М и КН от 27.06.2018 г., протокол № 6.

Председатель ______________ Бейбалаев В.Д.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением

«29» июня 2018 г. ______________Гасангаджиева А.Г.

2

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Обобщенные функции» входит в базовую часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.01 - Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, относящихся к теории обобщенных функций и ее приложениям, как в самой математике, так и в других областях естествознания.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

общепрофессиональных – ОПК-1,
профессиональных – ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *контрольных работ и коллоквиумов*, промежуточный контроль в форме *зачета*.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

<table>
<tr><th rowspan="5">Семестр</th><th colspan="8">Учебные занятия</th><th rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Всего</th><th colspan="7">в том числе</th></tr>
<tr><th colspan="6">Контактная работа обучающихся с преподавателем</th><th rowspan="3">СРС</th></tr>
<tr><th colspan="5">из них</th></tr>
<tr><th>Лекции</th><th>Лабораторные занятия</th><th>Практические занятия</th><th>КСР</th><th>консультации</th></tr>
<tr><td>8</td><td>108</td><td>32</td><td></td><td>18</td><td></td><td></td><td>58</td><td>Зачет</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

Освоение дисциплины «Обобщенные функции» преследует следующие цели: расширение представления студентов о понятии функции путем введения обобщенных функций, изучение основных операций над обобщенными функциями, ознакомление с применениями обобщенных функций в дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, физике, демонстрация эффективности применения обобщенных функций в прикладных задачах.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Обобщенные функции» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.01 – Математика.

Дисциплина «Обобщенные функции» преподается на 4 курсе бакалавриата факультета математики и компьютерных наук после изучения основных курсов математических дисциплин: математического анализа, алгебры и геометрии, дифференциальных уравнений и УЧП. Знание материала названных дисциплин необходимо для успешного освоения дисциплины «Обобщенные функции». Данная дисциплина позволяет придать математическую строгость различным физическим понятиям и явлениям.

Знания, умения и навыки, полученные в результате освоения данной дисциплины, будут способствовать дальнейшему формированию компетенций при изучении дисциплины «Дополнительные главы уравнений в частных производных»; они окажут неоценимую помощь при написании выпускных квалификационных работ по соответствующей тематике.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логи-	**Знает**: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций. **Умеет**: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат. **Владеет**: методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных функций.

	ки, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
ПК-3	Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	**Знает**: основные понятия и методы теории обобщенных функций; **Умеет**: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями **Владеет**: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.
4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
	Модуль 1. ***Обобщенные функции и действия над ними***								
1	Пространства основных и обобщенных функций	8	1-2	4	2			6	*Устный опрос*
2	Дифференцирование обобщенных функций	8	3	2	2			6	*Тестирование*
3	Прямое произведение и свертка обобщенных функций	8	4-5	4	2			6	*Контрольная работа*

	Итого по модулю 1			***10***	***6***			***18***	*Коллоквиум*
	Модуль 2. *Преобразование Фурье обобщенных функций*								
1	Обобщенные функции медленного роста	8	6-7	4	2			6	*Устный опрос*
2	Преобразование Фурье основных функций из пространства Шварца	8	8	2	2			4	*Устный опрос*
3	Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	8	9-10	6	4			10	*Тестирование*
	Итого по модулю 2			***12***	***8***			***20***	*Контрольная работа*
	Модуль 3. *Применение обобщенных функций*								
1	Применение обобщенных функций в дифференциальных уравнениях	8	11-13	6	2			10	*Устный опрос*
2	Применение обобщенных функций в физике	8	14-15	4	2			10	*Тестирование*
	Итого по модулю 3			***10***	***4***			***20***	*Коллоквиум*
	ИТОГО			**32**	**18**			**58**	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Модуль 1. Обобщенные функции и действия над ними

Тема 1. Пространство основных функций K.

Пространство K основных функций. Линейные операции и сходимость в K. Разбиение единицы. Умножение основной и бесконечно дифференцируемой функций.

Тема 2. Пространство обобщенных функций K'.

Определение обобщенной функции бесконечного порядка. Линейная замена аргумента. Носитель обобщенной функции. Сходимость. Формулы Сохоцкого. Ряды в пространстве обобщенных функций. Теорема о полноте.

Тема 3. Производная обобщенной функции

Производная обобщенной функции. Корректность определения. Связь между обычной и обобщенной производными. Почленная дифференцируемость рядов обобщенных функций.

Тема 4. Первообразная обобщенных функций

Первообразная. Существование первообразных высокого порядка. Теорема о существовании первообразной обобщенной функции нескольких переменных.

Тема 5. Прямое произведение обобщенных функций

Прямое произведение обычных и обобщенных функций. Корректность определения. Свойства прямого произведения.

Тема 6. Свертка обобщенных функций

Свертка обычных и обобщенных функций. Корректность определения и свойства. Случаи существования свертки обычных и обобщенных функций.

Модуль 2. Преобразование Фурье обобщенных функций

Тема 7. Пространство Шварца основных функций

Пространство S. Плотность в пространстве K. Пространство Шварца функций многих переменных.

Тема 8. Пространство обобщенных функций медленного роста

Обобщенные функции медленного роста. Структура обобщенных функций медленного роста с точечным носителем. Прямое произведение и свертка.

Тема 9. Преобразование Фурье основных функций

Преобразование Фурье функций пространства Шварца и его свойства. Формула обращения.

Тема 10. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста и его свойства. Формула обращения и двойное преобразование Фурье.

Модуль 3. Применение обобщенных функций

Тема 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций

Линейные дифференциальные уравнения и системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в пространстве обобщенных функций. Понятие обобщенного решения на данном множестве. Метод произвольных постоянных.

Тема 12. Фундаментальные решения дифференциальных операторов

Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Метод нахождения. Выражение решения неоднородного уравнения через фундаментальное решение. Применение дельта-функции в механике.

Тема 13. Применение обобщенных функций в физике

Задачи типа Коши в механике. Применение обобщённых функций в акустике. Линейные колебания в физике.

4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине

Модуль 1. Обобщенные функции и действия над ними

Тема 1. Пространство основных функций K.

Пространство K основных функций. Линейные операции и сходимость в K. Разбиение единицы. Умножение основной и бесконечно дифференцируемой функций.

Тема 2. Пространство обобщенных функций K'.

Определение обобщенной функции бесконечного порядка. Линейная замена аргумента. Носитель обобщенной функции. Сходимость. Формулы Сохоцкого. Ряды в пространстве обобщенных функций. Теорема о полноте.

Тема 3. Производная обобщенной функции

Производная обобщенной функции. Корректность определения. Связь между обычной и обобщенной производными. Почленная дифференцируемость рядов обобщенных функций.

Тема 4. Первообразная обобщенных функций

Первообразная. Существование первообразных высокого порядка. Теорема о существовании первообразной обобщенной функции нескольких переменных.

Тема 5. Прямое произведение обобщенных функций

Прямое произведение обычных и обобщенных функций. Корректность определения. Свойства прямого произведения.

Тема 6. Свертка обобщенных функций

Свертка обычных и обобщенных функций. Корректность определения и свойства. Случаи существования свертки обычных и обобщенных функций.

Модуль 2. Преобразование Фурье обобщенных функций

Тема 7. Пространство Шварца основных функций

Пространство S. Плотность в пространстве K. Пространство Шварца функций многих переменных.

Тема 8. Пространство обобщенных функций медленного роста

Обобщенные функции медленного роста. Структура обобщенных функций медленного роста с точечным носителем. Прямое произведение и свертка.

Тема 9. Преобразование Фурье основных функций

Преобразование Фурье функций пространства Шварца и его свойства. Формула обращения.

Тема 10. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста и его свойства. Формула обращения и двойное преобразование Фурье.

Модуль 3. Применение обобщенных функций

Тема 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций

Линейные дифференциальные уравнения и системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в пространстве обобщенных функций. Понятие обобщенного решения на данном множестве. Метод произвольных постоянных.

Тема 12. Фундаментальные решения дифференциальных операторов

Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Метод нахождения. Выражение решения неоднородного уравнения через фундаментальное решение. Применение дельта-функции в механике.

Тема 13. Применение обобщенных функций в физике

Задачи типа Коши в механике. Применение обобщённых функций в акустике. Линейные колебания в физике.

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. При проведении отдельных занятий материал может параллельно транслироваться на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мульмедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций).

В процессе преподавания дисциплины применяются такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

По теме «Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста» целесообразно провести мастер-класс с приглашением специалистов по математическому анализу.

При изложении темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций» предполагается встреча со специалистами по дифференциальным уравнениям из ДГПУ и ДНЦ РАН.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведены примерные варианты самостоятельных работ. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебные пособия [1] – [6] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Пространства основных и обобщенных функций»

Вариант 1

1. Доказать, что функция $\varphi(x)=e^{-x^2}$, $x\in R$, принадлежит основному пространству S.
2. Доказать, что если непрерывная функция f обращается в нуль в области G в смысле обобщенных функций, то $f(x)=0$ для всех $x\in G$.
3. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную в классическом смысле, то она совпадает с производной в смысле обобщенных функций.
4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)$ сходится в K' при любых $a_k\in R$.
5. Доказать предельное соотношение (в K') при $t\to+\infty$: $\dfrac{e^{ixt}}{x-i0}\to 2\pi i\delta(x)$.
6. Доказать равенство: $x^n\delta^{(n)}(x)=(-1)^n n!\delta(x)$.
7. Пусть $0\le a\le b$. Доказать, что
$$\theta(x-a)*\theta(x-b)=(x-a-b)\theta(x-a-b).$$

Вариант 2

1. Верно ли, что $e^x\ \varphi(x)\in S(R)$ для $\forall\varphi\in S$?
2. Доказать равенство $\theta(x)\sin x*\theta(x)\cos x=\dfrac{1}{2}x_+\cdot\sin x$.
3. Доказать предельное соотношение (в K') при $t\to+\infty$: $\dfrac{e^{-ixt}}{x-i0}\to 0$.
4. Пусть $|a_k|\le A|k|^m+B$ для некоторого $m>0$ и $\forall k=0\pm1,\pm2,...$. Тогда тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{ikx}$ сходится в $K'(R)$.
5. Доказать, что функционал $(\delta,\varphi)=\varphi(0)$ сингулярен.
6. Доказать равенство $\theta(x)\sin x*\theta(x)\sin x=\dfrac{1}{2}[\theta(x)\sin x-x_+\cdot\cos x]$.
7. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m\delta^{(m)}(x)$ сходится в K', то все коэффициенты a_m, начиная с некоторого номера, равны нулю.

Вариант 3

1. Доказать предельное соотношение (в K') при $t \to +\infty$: $\frac{e^{-ixt}}{x+i0} \to -2\pi i\delta(x)$.
2. Доказать, что если $\varphi(x) \in S$, то функции $\varphi^{(n)}(x)$ для любого $n \geq 0$ абсолютно интегрируемы на всей прямой $\mathbb{R}$.
3. Доказать, что если последовательность $\{\varphi_m(x)\}_1^\infty \subset K(R)$ сходится в пространстве K к функции φ, то $a\varphi_n \xrightarrow{K} a\varphi$ для любой бесконечно дифференцируемой функции a.
4. Доказать, что функция $\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}$ стремится к $\delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$.
5. Верно ли, что $x^n\varphi(x) \in S(R)$, $n \in N$ для $\forall\varphi \in S$?
6. Доказать равенство $\theta(x)\cos x * \theta(x)\cos x = \frac{1}{2}[\theta(x)\sin x + x_+ \cdot \cos x]$.
7. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную в классическом смысле, то она совпадает с производной в смысле обобщенных функций.

Вариант 4

1. Доказать предельное соотношение (в K') при $t \to +\infty$: $\frac{e^{ixt}}{x+i0} \to 0$.
2. Доказать, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)$ сходится в K'при любых $a_k \in R$.
3. Доказать, что если $f_n(x) = \cos nx$, то $f_n^{(k)} \xrightarrow{K'} 0$, $\forall k \geq 0$.
4. Доказать равенство $x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x)$.
5. Пусть $\varphi(x) \in K(R)$, $\varphi(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx = 1$. Доказать, что $\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{K'} \delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$.
6. Пусть $g(x)$ – локально интегрируемая функция, $\alpha_i = const$. Доказать, что равенство $g(x) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\delta(x-x_k) = 0$ (в K') имеет место тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$ (в K') и $\alpha k = 0, k = 1, \dots, n$.
7. Показать, что функционал $(y', \varphi) = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]dx$ является производной обобщенной функции $y = x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda \ при x > 0, \\ 0 \ при x < 0 \end{cases}$.

Вариант 5

1. Вычислить: а) $\frac{d}{dx}\{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть x; б) $\frac{d}{dx}[x]$, где $[x]$ - целая часть x; в) $\frac{d}{dx}\theta(1-|x|)$.
2. Доказать предельное соотношение (в K') при $t \to +\infty$: $\frac{e^{ixt}}{x-i0} \to 2\pi i\delta(x)$.

3. Показать, что функционал $(y',\varphi)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}[\varphi(x)-\varphi(0)\theta(1-x)]dx$ является производной обобщенной функции $y=\ln x_+ =\begin{cases}\ln x \text{ } при \text{ } x>0,\\ 0 \text{ } при \text{ } x<0\end{cases}$.
4. Доказать, что функционалы $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x},\varphi\right)=Vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ и $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x^2},\varphi\right)=Vp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$ являются обобщенными функциями. Показать, что $\mathrm{P}\frac{1}{x}\cdot x=1$, $\mathrm{P}\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$, $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x}\right)'=-\left(\mathrm{P}\frac{1}{x^2}\right)$.
5. Доказать, что $\operatorname{supp} f' \subset \operatorname{supp} f$, $f\in K'$.
6. Доказать формулу $\theta(x)\cos x*\theta(x)\cos x=\frac{1}{2}[\theta(x)\sin x+x_+\cdot\cos x]$.
7. Доказать, что $\delta^b\xrightarrow{S'}\delta$ при $b\to+\infty$, где $\delta^b(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|<b}e^{ix\cdot\xi}d\xi$, $x\cdot\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2+...+x_n\xi_n$.

6.3. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	*Виды и содержание самостоятельной работы*
Модуль 1. ***Обобщенные функции и действия над ними***	
1. Дифференцирование обобщенных функций.	Доклады на темы: 1. Применение обобщенных производных при суммировании расходящихся рядов ([1], [2], [5]). 2. Разбиение единицы и его применение ([1], [2], [5]).
2. Прямое произведение и свертка обобщенных функций.	Доклады на темы: 1. Регуляризация обобщенных функций и ее применение([3], [5]). 2. Случаи существования свертки обобщенных функций. Сверточная алгебра ([1], [2], [5]).
Модуль 2. ***Преобразование Фурье обобщенных функций***	
1. Обобщенные функции медленного роста.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
2. Преобразование Фурье основных функций из пространства Шварца.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
3. Преобразование Фурье обоб-	Доклад на тему:

щенных функций медленного роста	Обратное преобразование Фурье обобщенной функции. Формула обращения ([6], [9]).
Модуль 3. ***Применение обобщенных функций***	
1. Фундаментальные решения дифференциальных операторов	Доклад на тему: фундаментальные решения операторов математической физики и их применения
2. Применение обобщенных функций в физике	Доклад на тему: применение обобщенной многоточечной задачи Коши в механике

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-1	Знает: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций. Умеет: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат. Владеет: методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных функций.	Повторение постановок задач и их решения в классическом анализе, сравнение с аналогичными задачами в теории обобщенных функций. Проверка освоения в виде устного опроса и тестирования.
ПК-3	Знает: основные понятия и методы теории обобщенных функций; Умеет: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями Владеет: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.	Изучение тем дисциплины по лекциям, основной литературе [1] – [4], на практических занятиях решать задачи из книг [1], [2], [6]; выступления с докладами; круглый стол на тему «Обобщенная производная и ее применение».

7.2. Типовые контрольные задания

7.2.1. Примерные темы рефератов по дисциплине:

1) Сверточная алгебра обобщенных функций K'_{+}. Уравнения в сверточной алгебре K'_{+}
2) Преобразование Радона обобщенных функций и его применение.
3) Преобразование Хартли обобщенных функций и его применение.
4) Теория обобщенных функций вещественной переменной (секвенциальный подход).
5) Теория обобщенных функций вещественных переменных (секвенциальный подход).
6) Свертка и скалярное произведение обобщенных функций (секвенциальный подход).
7) Обобщенные функции и ряды Эрмита медленного роста.
8) Преобразование Гильберта обобщенных функций и его применения.
9) Преобразование Ханкеля обобщенных функций и его применения.
10) Пассивные системы и обобщенные функции.

7.2.2. Примерные контрольные вопросы для подготовки к зачету

1. Задачи, приводящие к необходимости введения обобщенных функций.
2. Пространства K^m, K, S основных функций. Сходимость. Примеры. Доказать, что K плотно в S.
3. Доказать, что если $\varphi(x) \in S$, то функции $\varphi^{(n)}(x)$ для любого $n \geq 0$ абсолютно интегрируемы на всей прямой R.
4. Теорема о существовании основной функции $\varphi \in K$, равной единице на заданном компактном множестве.
5. Определение обобщенной функции. Пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.
6. Равенство обобщенных функций. Носитель о.ф. Умножение о.ф. на бесконечно дифференцируемую функцию.
7. Лемма дю Буа-Реймонда.
8. Линейная замена аргумента в обобщенной функции. Четность дельта-функции Дирака.
9. Производная о.ф. Корректность определения. Линейность и непрерывность. Связь с производной в обычном смысле.
10. Ряды обобщенных функций. Почленная дифференцируемость рядов о.ф.
11. Доказать, что если ряд, составленный из обычных функций, сходится в смысле обобщенных функций на каждом компакте, то его можно почленно дифференцировать любое число раз, и полученные ряды будут сходиться в K'.
12. Пусть $|a_k| \leq A|k|^m + B$ для некоторого m>0 и $\forall k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ Тогда тригонометрический ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ сходится в $K'(R)$.
13. Дельтообразные последовательности.

14. Первообразная обобщенной функции. Теорема о существовании.
15. Первообразные высших порядков обобщенных функций. Теорема о существовании.
16. Прямое произведение обобщенных функций. Корректность определения.
17. Доказать, что если $g \in K'(R^m)$, $\varphi \in K(R^{n+m})$, то функция $\varphi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$ принадлежит $K(R^n)$, причем справедлива формула $D^\alpha \varphi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y))$.
18. Свойства прямого произведения о.ф.
19. Свертка обычных функций. Случаи существования свертки.
20. Свертка обобщенных функций. Корректность определения и свойства.
21. Теорема о существовании свертки обобщенной функции с основной функцией.
22. Регуляризация обобщенных функций. Плотность пространства K в пространстве обобщенных функций K'.
23. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье функций пространства Шварца. Примеры. Формула обращения преобразования Фурье.
24. Взаимная однозначность и непрерывность преобразования Фурье в пространстве Шварца.
25. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Примеры и свойства.
26. Обратное преобразование Фурье обобщенных функций. Формула обращения.
27. Взаимная однозначность и непрерывность преобразования Фурье в пространстве S'.
28. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем.
29. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций.
30. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в пространстве обобщенных функций и обобщенными неоднородностями.
31. Системы линейных дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и обобщенными неоднородностями.
32. Обобщенное решение неоднородного дифференциального уравнения на данном множестве.
33. Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.
34. Выражение решения неоднородного уравнения через фундаментальное решение.
35. Метод вариации постоянных нахождения частного обобщенного решения дифференциального уравнения.
36. Фундаментальное решение волнового оператора.
37. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.
38. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
39. Линейные колебания в механике. Применение обобщенных функций для решения задачи с начальными данными.
40. Решение двухточечной задачи для уравнения колебаний материальной точки.
41. Применение обобщенных функций в методах фильтрации и Фурье-синтеза обращения преобразования Радона.

7.2.3. Примерные варианты контрольных работ по теме «Пространства основных и обобщенных функций»

Вариант 1

1. Доказать, что функция $\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{|ab|}{(x-a)(b-x)}} \text{ при } x\in(a,b),\\ 0 \text{ при } x\notin(a,b)\end{cases}$ принадлежит основному пространству $K(\mathbb{R})$.
2. Доказать, что если последовательность $\{\varphi_m(x)\}_1^\infty\subset K(R)$ сходится в пространстве K к функции φ, то $a\varphi_n \xrightarrow{K} a\varphi$ для любой бесконечно дифференцируемой функции a.
3. Доказать, что функционал $(\delta,\varphi)=\varphi(0)$ сингулярен.
4. Доказать, что функционалы $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x},\varphi\right)=Vp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ и $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x^2},\varphi\right)=Vp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$ являются обобщенными функциями. Показать, что $\mathrm{P}\frac{1}{x}\cdot x=1$, $\mathrm{P}\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$, $\left(\mathrm{P}\frac{1}{x}\right)'=-\left(\mathrm{P}\frac{1}{x^2}\right)$.
5. Показать, что функционал $(y',\varphi)=\int\limits_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx$ является производной обобщенной функции $y=x_+^\lambda=\begin{cases} x^\lambda \ \textit{при}\ x>0,\\ 0\ \textit{при}\ x<0\end{cases}$.
6. Показать, что: $\theta'(x)=\delta(x)$, $\theta'(x-h)=\delta(x-h)$, $\operatorname{supp}\delta(x-h)=\{h\}$.
7. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m\delta^{(m)}(x)$ сходится в K', то все коэффициенты a_m, начиная с некоторого номера, равны нулю.

Вариант 2

1. Доказать, что функция $\varphi(x)=\begin{cases} \sin^{m+1}\frac{x-a}{b-a} \text{ при } x\in[a,b],\\ 0 \text{ при } x\notin[a,b]\end{cases}$ принадлежит основному пространству $K^m[a,b]$.
2. Доказать, что если последовательность $\{\varphi_m(x)\}_1^\infty\subset K(R)$ сходится в пространстве K к функции φ, то $a\varphi_n \xrightarrow{K} a\varphi$ для любой бесконечно дифференцируемой функции a.
3. Доказать, что следующие функции стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon\to+0$:

а) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$, б) $\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}$.

4. Показать, что функционал $(y',\varphi)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}[\varphi(x)-\varphi(0)\theta(1-x)]dx$ является производной обобщенной функции $y=\ln x_+ =\begin{cases}\ln x \ при\ x>0,\\ 0\ при\ x<0\end{cases}$.
5. Вычислить $\frac{d^3}{dt^3}|t|$.
6. Пусть *g(x)* – локально интегрируемая функция, α_i=*const*. Доказать, что равенство (в K') $g(x)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\delta(x-x_k)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $g(x)\overset{K'}{=}0$ и α_k*=0, k=1,…,n..*
7. Доказать равенство: $x^n\delta^{(n+k)}(x)=(-1)^n\frac{(n+k)!}{k!}\delta^{(k)}(x)$

Вариант 3

1. Доказать, что если $\varphi(x)\in S$, то функции $\varphi^{(n)}(x)$ для любого $n\ge 0$ абсолютно интегрируемы на всей прямой ***R***.
2. Доказать, что для того чтобы для функции $\varphi\in K$ существовала $\psi\in K$ такая, что $\varphi=\psi'$ необходимо и достаточно, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=0$.
3. Доказать, что следующие функции стремятся к *δ(x)* при $\varepsilon\to+0$:

   а) $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$, б) $\frac{1}{\pi\varepsilon x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}$.
4. Доказать, что если $f_n(x)=\cos nx$, то $f_n^{(k)}\xrightarrow{K'}0$, $\forall k\ge 0$.
5. Вычислить: а) $\frac{d}{dx}\{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть x; б) $\frac{d}{dx}[x]$, где $[x]$ - целая часть x; в) $\frac{d}{dx}\theta(1-|x|)$.
6. Разложив функцию $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\pi}$ в ряд Фурье на отрезке *[0,2π]* и дважды продифференцировав полученный ряд, доказать формулу
$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi).$$
7. Пусть $|a_k|\le A|k|^m+B$ для некоторого *m>0* и $\forall k=0\pm1,\pm2,\ldots$. Доказать, что тогда тригонометрический ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{ikx}$ сходится в $K'(R)$.

7.2.4. Примерные варианты контрольных работ по модулю «Преобразование Фурье обобщенных функций»

Вариант 1

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $F[\theta(1-|x|)x](\xi)$.
2. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d}{dt}$.
3. В пространстве обобщенных функций найти общее решение дифференциального уравнения $y' + xy = \delta$.

Вариант 2

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $F\left[\operatorname{sign}\frac{x-1}{2}\right](\xi)$.
2. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^2}{dt^2}-2\frac{d}{dt}+1$.
3. В пространстве обобщенных функций найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = x_+$.

Вариант 3

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $F\left[P\frac{1}{(x+1)^2}\right](\xi)$.
2. Найти общее обобщенное решение дифференциального уравнения $xf' = \operatorname{sign} x + \delta$.
3. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d}{dt}-2$.

7.2.5. Примерные задания тестов

Тест №1

1. Какие из приведенных ниже функционалов f являются обобщенными функциями (из K'):

   1) $(f,\varphi)=\int\limits_{-1}^{\infty}\varphi(x)dx$; 2) $(f,\varphi)=\varphi(0)+1$; 3) $(f,\varphi)=|\varphi(1)|$; 4) $(f,\varphi)=\varphi'(0)$;

   5) $(f,\varphi)=\varphi(0)-\varphi'(-1)$; 6) $(f,\varphi)=\varphi(0)\cdot\varphi'(0)$.
2. Вычислить: $x\delta(x)$.

1) 1; 2) x^2; 3) 0; 4) $\theta(x)$.

3. Вычислить значения функционала $\delta(-x)$на функциях $\varphi(x) \in K$.

   1) $\varphi(0)$; 2) $-\varphi(0)$; 3) $\varphi(1)$; 4) $-\varphi(1)$.

4. Вычислить пределы в K' последовательности $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{\operatorname{ch} nx}$ обобщенных функций при $n \to \infty$.

   1) $\delta(x)$; 2) 0; 3) 1; 4) 2π.

5. Пусть $f_n(x) = \cos nx$. Чему равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x)$ в пространстве обобщенных функций.

   1) 0; 2) не существует; 3) 1; 4) $\sin x$.

6. Вычислить $x\delta^{(4)}(x)$.

   1) $-4\delta^{(3)}(x)$; 2) $3\delta^{(3)}(x)$; 3) 0; 4) $-4\delta^{(5)}(x)$

7. Вычислить $\theta(x) * x_+{}^3$.

   1) $\frac{1}{4} x_+^4$; 2) $4x_+^4$; 3) свертка не определена; 4) 0.

8. Найти преобразование Фурье $F[\delta(x-2)](\xi)$.

   1) $e^{-2i\xi}$; 2) $e^{2i\xi}$; 3) $e^{-2\xi}$; 4) $e^{2\xi}$.

9. Найдите фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d}{dt} - 1$.

   1) $\theta(t)e^t$; 2) $\theta(t)e^{-t}$; 3) $\delta(t)$; 4) e^{-it}.

10. Выберите фундаментальное решение волнового оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

    1) $\frac{1}{2}\theta(t-|x|)$; 2) $\frac{1}{2}\theta(t+|x|)$; 3) $2\theta(t-|x|)$; 4) $-\frac{1}{4\pi|x|}$.

7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1) **Владимиров, Василий Сергеевич.**
Уравнения математической физики : учебник для физ.-техн. спец. вузов. / Владимиров, Василий Сергеевич. - 5-е доп. - М : Наука, 1988. - 512 с. : ил. ; 22 см. - с.509-512. - ISBN 5-02-013769-X : 1-30.
2) **Владимиров, Василий Сергеевич.**
Обобщенные функции в матетатической физике. / Владимиров, Василий Сергеевич. - 2-е испр, доп. - М : Наука, 1979. - 318 с. : ил. ; 22 см. - (Соврем. физ.-техн. проблемы.). - с.310-314.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
3) **Гельфанд И.М.**
Обобщение функции и действия на ними. / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. - Изд. 2-е. - М. : Госизд. физ.-мат. лит-ры, 1959. - 470с. - ([Обобщенные функции]. Вып.1).
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
4) **Гельфанд И.М.**
Обобщение функции и действия на ними. / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. - М. : Госизд. физ.-мат. лит-ры, 1958. - 439с.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
5) **Гельфанд И.М.**
Пространства основных и обобщенных функций. / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. - М. : Госизд. физ.-мат. лит-ры, 1958. - 307с.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
6) **Кеч, В.**
Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску; пер. с рум. О.Е. Булгару под ред. Б.Е. Победри. - М. : Мир, 1978. - 518 с. - Библиогр.: с. 504-507. - Предм. указ.: с. 508-514. - 60-00.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ

б) дополнительная литература:

7) **Гольдштейн, Владимир Михайлович.**
Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / Гольдштейн,Владимир Михайлович, Решетняк,Юрий Григорьевич. - М.: Наука, 1983. - 284с. - 0-0.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
8) **Шилов Г.Е**. Математический анализ. Второй спец. курс. М.: Изд. МГУ, 1984.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
9) **Владимиров В.С.** и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
10) **Бремерман Г.**
Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. : Пер с англ В.П. Павлова и Б.М. Степанова. / Г. Бремерман. - М. : Мир., 1968. – 276 с.
Местонахождение: Научная библиотека ДГУ
11) **Асташова И.В.** Функциональный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Асташова И.В.– Электрон. текстовые данные.– М.: Евразийский открытый институт, 2011.– 112 с.– Режим доступа:

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт – для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	**Студентам:** - запустить установленный у Вас математический пакет выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. **Всем заинтересованным пользователям:** **1.** можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. **2.** найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.

4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.**Ru**)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Язык обобщенных функций (или распределений, как их еще называют в литературе) является основным языком многих современных направлений математики. Дисциплина «Обобщенные функции» способствует выработке этого языка у будущих бакалавров. Поэтому творческое овладение этой дисциплиной особенно важно для тех, кто собирается продолжить учебу в магистратуре и аспирантуре по различным направлениям. Специфика дисциплины состоит в том, что здесь подвергаются пересмотру такие базовые понятия классического анализа, как предел, производная и др. Обобщение этих понятий не только расширяет круг решаемых задач, но и значительно упрощает решение этих задач, автоматизируя многие математические операции.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы «Дифференциальные уравнения высокого порядка» и «Системы линейных дифференциальных уравнений».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников, рекомендованных в п. 8: [1], [2], [4], [5].

Решать задачи и упражнения из учебных пособий и задачников: [1], [5], [6].

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Обобщенные функции» необходимы:
Системное программное обеспечение: ОС Windows 7/8/10;
Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/2010/2013;
Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных и практических занятий по дисциплине необходима аудитория на 20-25 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.
Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины «Обобщенные функции». Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.
В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.