

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

Рабочая программа дисциплины

**Классы функций и
вопросы теории приближения функций**

Кафедра математического анализа
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа
01.04.01 Математика

Профиль подготовки
Математический анализ

Уровень высшего образования
магистратура

Форма обучения
очная

Статус дисциплины: вариативная (обязательные дисциплины)

Махачкала, 2018

Рабочая программа дисциплины *Классы функций и вопросы теории приближения функций* составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.01 Математика (уровень магистратуры) от 17.08.2015 г. № 827.

Разработчик: кафедра математического анализа,
Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н., профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

На заседании кафедры математического анализа от 25 июня 2018 г.,
протокол № 10.

Зав. кафедрой  Рамазанов А.-Р.К.

На заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от
26 июня 2018 г., протокол № 6.

Председатель  Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением
« 28 » 06 2018 г. 

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *Классы функций и вопросы теории приближения функций* входит в вариативную часть образовательной программы магистратуры по направлению 01.04.01 Математика.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук* кафедрой *математического анализа*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных со свойствами функций из различных классов, с различными метриками, с прямыми и обратными теоремами теории приближения функций полиномами и рациональными дробями.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
общепрофессиональных – ОПК-2;
профессиональных – ПК-1.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать: свойства равномерно непрерывных функций, свойства функций ограниченной вариации, суммируемых функций, абсолютно непрерывных функций, равномерные и интегральные метрики и их свойства;

уметь: применять свойства равномерно непрерывных функций, функций ограниченной вариации, суммируемых функций, абсолютно непрерывных функций, оценивать погрешности аппроксимации функций полиномами, рациональными дробями в различных метриках;

владеть: элементарными методами теории вложения классов и сравнительного анализа классов Липшица и Гёльдера, функций ограниченной вариации, абсолютно непрерывных функций, а также методами оценок погрешности аппроксимации в различных метриках для применения в математике и в области других естественнонаучных дисциплин.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение контроля успеваемости в форме *контрольной работы и коллоквиума* и промежуточного контроля в форме *зачета*.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семес тр	Учебные занятия					СРС	Форма промежуточной аттестации	
	Все го	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лекц ии	Лаборатор ные занятия	Практич еские занятия	КСР	консульт ации				
9	108	8		16		84	зачет	

1. Цели освоения дисциплины

Приобретение знаний и умений по исследованию и решению задач на свойства функций из важнейших функциональных классов современного анализа.

Владение методами исследования скорости приближения функций полиномами, рациональными функциями, сплайнами для возможности применения в дальнейшей научно-исследовательской деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина *Классы функций и вопросы теории приближения функций* входит в вариативную часть образовательной программы по направлению 01.04.01 *Математика* (Б1.В.ОД.2).

К исходным требованиям для изучения дисциплины относятся знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения дисциплин: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ.

Дисциплина является основой для последующего изучения других дисциплин и прохождения практик.

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения
ОПК-2	способность создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках	Знает: различные аппараты приближения (полиномы, рациональные функции, сплайны и др.); различные нормы и метрики (равномерные, интегральные, с весом и др.). Умеет: создавать модели явлений, процессов и конструкций в форме функциональной зависимости, допускающей аппроксимацию тем или иным аппаратом в той или иной метрике. Владеет методами моделирования естественнонаучных задач в форме некоторой функциональной зависимости, допускающей аппроксимацию определенным аппаратом приближения в определенной метрике.
ПК-1	способность к интенсивной научно-исследовательской работе	Знает фундаментальные свойства функций из различных классов, полиномов, рациональных функций и сплайнов, различных метрик. Умеет давать оценки скорости сходимости полиномов, рациональных функций и сплайнов к функциям в различных метриках. Владеет методами теории вложения классов функций и элементами теории приближения функций.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

4.2. Структура дисциплины

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
Модуль 1. Классы функций								
1. Классы непрерывных и дифференцируемых функций.			1	2			10	
2. Классы Липшица, Гёльдера и вариаций.			1	2			8	
3. Классы Лебега, абсолютно непрерывных функций и Соболева.			1	2			8	
Всего по модулю 1	9		3	6		1	26	КОЛЛОКВИУМ
Модуль 2. Наилучшие приближения								
1. Полиномы, рациональные функции, сплайны.			1	2			10	
2. Различные метрики и задача о наилучших приближениях.			1	2			8	
3. Свойства элемента наилучшего приближения.			1	2			8	
Всего по модулю 2	9		3	6		1	26	КОЛЛОКВИУМ
Модуль 3. Прямые и обратные теоремы								
1. Некоторые прямые теоремы теории приближения.			1	2			16	
2. Об обратных теоремах теории приближения.			1	2			14	
Всего по модулю 3	9		2	4			30	КОЛЛОКВИУМ
ИТОГО за семестр	9		8	16		2	82	зачет

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

Модуль 1. Классы функций

- Тема 1. Классы непрерывных и дифференцируемых функций.
Классы равномерно непрерывных функций $C[a,b]$ и $C_{2\pi}$.
Модуль непрерывности, его свойства, оценки.
- Тема 2. Классы Липшица, Гёльдера и вариаций.
Классы Липшица и Гёльдера. Классы Жордана, Винера и Орлича.
Соотношения между этими классами.
- Тема 3. Классы Лебега, абсолютно непрерывных функций и Соболева.
Интеграл Лебега (сравнение различных определений). Классы Лебега. Абсолютно непрерывные функции. Классы Соболева.

Модуль 2. Наилучшие приближения

- Тема 1. Полиномы, рациональные функции, сплайны.
Классы простейших по структуре функций (полиномы, рациональные функции, сплайны). Оценки производных полиномов и рациональных функций. Неравенства типа С.Н. Бернштейна, А.А. Маркова, А. Н. Колмогорова.
- Тема 2. Различные метрики и задача о наилучших приближениях.
Различные метрики: равномерная, интегральные, вариаций, Хаусдорфа, несимметричная. Теоремы Вейерштрасса о полиномиальных приближениях. Постановка задачи наилучшего приближения.
- Тема 3. Свойства элемента наилучшего приближения.
Теорема Бореля о существовании полинома наилучшего приближения. Вопрос существования элемента наилучшего приближения в других метриках.
Характеристическое свойство элемента наилучшего приближения. Теоремы П.Л. Чебышева и А.Н. Колмогорова. Вопросы единственности и устойчивости элемента наилучшего приближения. Полиномы Чебышева, их свойства.

Модуль 3. Прямые и обратные теоремы

- Тема 1. Некоторые прямые теоремы теории приближения.
Теоремы Джексона о приближениях тригонометрическими и алгебраическими полиномами.
- Тема 2. Об обратных теоремах теории приближения.
Оценки производных полиномов и рациональных функций. Оценки модулей непрерывности функций через скорость их полиномиальных и рациональных приближений.

4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине

Модуль 1. Классы функций

- Тема 1. Классы непрерывных и дифференцируемых функций.
Равномерно непрерывные функции. Дифференцируемые функции.
Нахождение и оценки модулей непрерывности.
- Тема 2. Классы Липшица, Гёльдера и вариаций.
Задачи на соотношения между классами Липшица, Гёльдера и Жордана.
Вычисление и оценки вариаций функций.

Тема 3. Классы Лебега, абсолютно непрерывных функций и Соболева.
Сравнение интегралов Римана и Лебега.
Абсолютно непрерывные функции.

Модуль 2. Наилучшие приближения

- Тема 1. Полиномы, рациональные функции, сплайны
Алгебраические свойства полиномов и рациональных функций.
- Тема 2. Различные метрики и задача наилучших приближений.
Равномерная, интегральные и несимметричная метрики.
Оценки наилучших приближений функций полиномами.
- Тема 3. Свойства элемента наилучшего приближения.
Полиномы наилучшего приближения.
Полиномы Чебышева, их свойства.

Модуль 3. Прямые и обратные теоремы

- Тема 1. Некоторые прямые теоремы теории приближения.
Примеры на оценки погрешности приближения функций полиномами, рациональными функциями и сплайнами.
- Тема 2. Об обратных теоремах теории приближения.
Оценки производных полиномов и рациональных функций.

5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Учебно-методические пособия для самостоятельной работы

1. Рамазанов А.-Р. К. Классы функций (Избранные задачи с краткими решениями). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2000.
2. Загиров Н.Ш., Рамазанов А.-Р. К. Приближение полиномами и рациональными функциями. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1989.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

Указать все функции, которые непрерывны, но не равномерно:

- a) $\frac{1}{x}$ на $(0;1]$;
- b) \sqrt{x} на $(0;1]$;
- c) $x \sin \frac{1}{x}$ на $(0;1]$;
- d) e^x на $(0;1]$;
- e) $\ln(1+x)$ на $(0;1]$;

- 1) а); 2) а) и с); 3) а), с) и е); 4) а) и б); 5) а),б),с) и е).

Вариант 2.

Какие из функций принадлежат классу (указать все такие функции): $Lip\frac{1}{2}$

а). \sqrt{x} на $[0;1]$; б). $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ на $(0;1]$; с). $|x|$ на $[-1;1]$

д). $x^{2/3}$ на $[0;1]$; е). $x^{1/4}$ на $[0;1]$.

- 1) а), б), с) и е); 2) а), б), с) и д);
3) а), с) и д); 4) а) и с); 5) а) и д).

Вариант 3.

Функция $f(x)=\sin|x|$ на отрезке $[-1;1]$ является (указать все правильные ответы):

- а) Ограниченной вариации, но не абсолютно непрерывной.
б) Абсолютно непрерывной.
с) Ограниченной вариации и абсолютно непрерывной.
д) Ограниченной вариации.
е) Неограниченной вариации.
1) а), б), с) и е); 2) а), б), с) и д); 3) а), с) и д);
4) а) и с); 5) а) и д).

Рефераты и доклады по темам для самостоятельной работы

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Модуль 1. Классы функций	
1. Классы непрерывных и дифференцируемых функций.	Доклад на тему: Глобальные свойства непрерывных функций.
2. Классы Липшица, Гёльдера и вариаций.	Доклад на тему: Соотношения между классами Липшица и конечной вариации.
3. Классы Лебега, абсолютно непрерывных функций и Соболева.	Доклад на тему: Интегральное представление абсолютно непрерывных функций.
Модуль 2. Наилучшие приближения	
1. Полиномы, рациональные функции, сплайны.	Доклад на тему: Различные виды сплайнов.
2. Различные метрики и задача наилучших приближений.	Доклад на тему: Хаусдорфовы метрики.
3. Свойства элемента наилучшего приближения.	Доклад на тему: Полиномы Чебышева.
Модуль 3. Прямые и обратные теоремы	
1.Некоторые прямые теоремы теории приближения.	Доклад на тему: Приближение сплайнами.
2.Об обратных теоремах теории приближения.	Доклад на тему: Теорема С.Н.Бернштейна об оценке нормы производной полинома.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-2	Обладать способностью создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках	Знает: различные аппараты приближения (полиномы, рациональные функции, сплайны и др.); различные нормы и метрики (равномерные, интегральные, с весом и др.). Умеет: создавать модели явлений, процессов и конструкций в форме функциональной зависимости, допускающей аппроксимацию тем или иным аппаратом в той или иной метрике. Владеет методами моделирования естественнонаучных задач в форме некоторой функциональной зависимости, допускающей аппроксимацию определенным аппаратом приближения в определенной метрике.	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиума
ПК-1	Обладать способностью к интенсивной научно-исследовательской работе	Знает фундаментальные свойства функций из различных классов, полиномов, рациональных функций и сплайнов, различных метрик. Умеет давать оценки	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиума

		<p>скорости сходимости полиномов, рациональных функций и сплайнов к функциям в различных метриках. Владеет методами теории вложения классов функций и элементами теории приближения функций.</p>	
--	--	--	--

7.2. Типовые контрольные задания

Примерные вопросы к коллоквиуму

1. Класс непрерывных функций. Равномерная непрерывность 2π - периодических функций.
2. Модуль непрерывности, основные свойства.
3. Классы Липшица.
 1. Функции ограниченной вариации.
 2. Соотношение классов V - и $Lip\alpha$.
 3. Достаточные условия полуаддитивности.
 4. Абсолютно непрерывные функции.
 5. Соотношение классов AC и $Lip\alpha$.
6. Неравенство С.Н. Бернштейна об оценке производной тригонометрического полинома.
7. Интеграл Лебега. Классы Лебега L_p .
8. Классы Винера и Орлича.
9. Оценки модуля непрерывности (сверху и снизу).
10. Сингулярные функции.
11. Различные метрики (равномерная, интегральные).
12. Знакочувствительный вес. Полунорма относительно веса.
13. Теорема Бореля.
14. Полиномы Чебышева.
15. Вопросы единственности и устойчивости элемента наилучшего приближения.
16. Оценки производных алгебраических полиномов и рациональных функций.
17. Классы Гельдера.

7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. [Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие](#) - Москва: Наука, 1974
Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной : учебное пособие / И.П. Натансон. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1974. - 480 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802> ().
2. [Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами](#) - Москва: Наука, 1977
Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами / В.К. Дзядык ; ред. В.В. Абгарян, Л.В. Тайкова. - Москва : Наука, 1977. - 512 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456951> ().
3. [Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного](#) - Москва: Гос. изд-во физико-математической лит., 1960
Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. - Москва : Гос. изд-во физико-математической лит., 1960. - 624 с. - ISBN 978-5-4458-5451-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222399> ().
4. [Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3](#) - Москва: Физматлит, 2002
Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196> ().

б) дополнительная литература:

1. [Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения](#) - Москва: Наука, 1976
Корнейчук, Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук ; ред. Б.И. Голубова, Г.Я. Пироговой. - Москва : Наука, 1976. - 320 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456961> ().
2. [Действительный анализ в задачах: учебное пособие](#) - Москва: Физматлит, 2005
Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко и др. - Москва : Физматлит, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331> ().
3. [Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация](#) - Москва: Мир, 1975
Лоран, П.Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.Ж. Лоран ; под ред. Г.Ш. Рубинштейн, Н.Н. Яненко ; пер. с фр. Ю.С. Завьялова, Р.А. Звягиной и др. - Москва : Мир, 1975. - 495 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457011> ().
4. [Натансон И. П. Конструктивная теория функций](#) - Москва, Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949
Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. - Москва ; Ленинград : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. - 688 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=479695> ().

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12 – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer
4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ
5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: [http://moodle.dgu.ru/\(\)](http://moodle.dgu.ru/).

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Учебная программа по дисциплине распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к докладу или реферату, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Университет обладает достаточной базой оснащенных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.