

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

**Рабочая программа дисциплины**

**Классы функций**  
**действительных переменных**

Кафедра математического анализа  
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки  
Математический анализ и приложения

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Форма обучения  
очная

Статус дисциплины: вариативная (по выбору)

Махачкала, 2018

Рабочая программа дисциплины *Классы функций действительных переменных* составлена в 2018 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриата) от 07.08. 2014 г. № 949.

Разработчик: кафедра математического анализа,  
Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н., профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

*На заседании кафедры математического анализа от 25 июня 2018 г.,  
протокол № 10.*

*Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Рамазанов А.-Р.К.*

*На заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г., протокол № \_\_\_\_\_.*

*Председатель \_\_\_\_\_ Бейбалаев В.Д.*

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г. \_\_\_\_\_

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина *Классы функций действительных переменных* входит в вариативную по выбору часть образовательной программы бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Дисциплина реализуется на факультете *математики и компьютерных наук* кафедрой *математического анализа*.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных со свойствами функций из различных классов функций и соотношениями между различными классами функций.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
*общепрофессиональных – ОПК-1;*  
*профессиональных – ПК-3.*

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

*знать:* свойства непрерывных функций, монотонных функций, выпуклых функций, функций конечной вариации, суммируемых функций, а также абсолютно непрерывных функций;

*уметь:* применять свойства непрерывных функций, функций ограниченной вариации, абсолютно непрерывных функций и суммируемых функций при оценке интегралов, при оценке погрешностей приближения и интерполирования функций;

*владеть:* элементарными методами теории вложения классов и сравнительного анализа классов Липшица и Гёльдера, функций ограниченной вариации, абсолютно непрерывных функций для применения в математике и в области других естественнонаучных дисциплин.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение контроля успеваемости в форме *контрольной работы и коллоквиума* и промежуточного контроля в форме *зачета*.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семес тр	Учебные занятия							Форма промежуточной аттестации
	Все го	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС	
		из них						
		Лекц ии	Лаборатор ные занятия	Практич еские занятия	КСР	консульт ации		
8	108	30		30			48	зачет

### 1. Цели освоения дисциплины

Приобретение знаний и умений по исследованию свойств функций действительных переменных из различных классов.

Владение методами теории вложения классов функций для возможности применения в дальнейшей научно-исследовательской деятельности.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина *Классы функций действительных переменных* входит в вариативную по выбору часть образовательной программы по направлению 02.03.01 *Математика и компьютерные науки* (Б1.В.ДВ.11.1).

К исходным требованиям для изучения дисциплины относятся знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения дисциплин: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ.

Дисциплина является основой для последующего изучения других дисциплин и прохождения практик.

Знания по данному курсу необходимы при работе над выпускной квалификационной работой и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	Знает основные свойства непрерывных функций, дифференцируемых функций, функций ограниченной вариации, абсолютно непрерывных функций. Умеет: определить принадлежность индивидуальных функций к тому или иному классу функций; анализировать соотношения между различными классами непрерывных функций. Владеет основными методами теории вложения классов функций действительных переменных.
ПК-3	Обладать способностью строго доказывать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Знает: точные определения основных понятий и строгие формулировки основных теорем из теории вложения классов функций действительных переменных. Умеет проводить логически точные математические рассуждения при доказательстве теорем теории вложения классов функций, строго соблюдая при этом причинно-следственные связи. Владеет: классическими методами доказательства основных принципов анализа и важнейших теорем о свойствах функций из основных классов функций действительных переменных.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

#### 4.2. Структура дисциплины

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекций	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
Модуль 1. Классы Гельдера								
1. Классы равномерно непрерывных функций.			4	4				
2. Модули непрерывности.			2	2				
3. Классы Липшица, Гёльдера.			4	4				
Всего по модулю 1	8		10	10			16	коллоквиум
Модуль 2. Классы функций конечной вариации								
1. Монотонные функции.			2	2				
2. Классы Жордана.			4	4				
3. Классы Винера, Орлича.			4	4				
Всего по модулю 2	8		10	10			16	коллоквиум
Модуль 3. Абсолютно непрерывные функции								
1.Свойства абсолютно непрерывных функций.			6	6				
2.Задача восстановления функции по ее производной.			4	4				
Всего по модулю 3	8		10	10			16	коллоквиум
ИТОГО за семестр	8		30	30			48	зачет

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### **Модуль 1. Классы Гельдера**

Тема 1. Классы равномерно непрерывных функций.

Классы функций  $C[a, b]$  и  $C_{2\pi}$ .

Классы дифференцируемых функций.

Тема 2. Модули непрерывности.

Модуль непрерывности, его свойства.

Оценки модуля непрерывности.

Модули непрерывности высших порядков.

Тема 3. Классы Липшица, Гельдера.

Классы Липшица. Основные свойства функций из классов Липшица.

Классы Гельдера. Соотношения между этими классами и классом всех непрерывных функций.

##### **Модуль 2. Классы функций конечной вариации**

Тема 1. Монотонные функции.

Непрерывность и разрывы монотонных функций.

Дифференциальные свойства монотонных функций.

Тема 2. Классы Жордана.

Функции ограниченной вариации по Жордану. Свойства.

Связь с монотонными функциями. Соотношения с классами Липшица и Гельдера.

Тема 3. Классы Винера, Орлича.

Обобщенная вариация по Винеру и по Орличу.

Связи с классами Липшица и Гельдера.

##### **Модуль 3. Абсолютно непрерывные функции**

Тема 1. Свойства абсолютно непрерывных функций.

Различные определения абсолютной непрерывности. Класс абсолютно непрерывных функций. Связь с классами Липшица, ограниченной вариации.

Выпуклые функции.

Классы Лебега. Классы Соболева.

Тема 2. Задача восстановления функции по ее производной.

Формула Ньютона-Лейбница для интеграла Римана. Достаточные условия восстановления функции по производной. Необходимость расширения понятия интеграла. Восстановление функции по производной в случае интеграла Лебега.

Сингулярные функции.

#### 4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине

##### **Модуль 1. Классы Гельдера**

Тема 1. Классы равномерно непрерывных функций.

Класс непрерывных и класс дифференцируемых функций.

Тема 2. Модули непрерывности.

Модуль непрерывности.

Модули непрерывности высших порядков.

Тема 3. Классы Липшица, Гельдера.

Классы Липшица и Гельдера. Связи между ними.

##### **Модуль 2. Классы функций конечной вариации**

Тема 1. Монотонные функции.

Разрывы, непрерывность, дифференцируемость монотонных функций.

Тема 2. Классы Жордана.

Функции ограниченной вариации по Жордану.

Соотношения с классами Липшица и Гельдера.

Тема 3. Классы Винера, Орлича.

Связи с классами Липшица и Гельдера.

### ***Модуль 3. Абсолютно непрерывные функции***

Тема 1. Свойства абсолютно непрерывных функций.

Различные определения абсолютной непрерывности.

Связь с классами Липшица, ограниченной вариации.

Классы Лебега.

Тема 2. Задача восстановления функции по ее производной.

Формула Ньютона-Лейбница для интеграла Римана.

Восстановление функции по производной в случае интеграла Лебега.

Сингулярные функции.

## **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### *Учебно-методические пособия для самостоятельной работы*

1. Рамазанов А.-Р. К. Классы функций (избранные задачи с краткими решениями). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2000.

### *Задания для самостоятельной работы*

#### *Вариант 1*

Указать все функции, которые непрерывны, но не равномерно:

a)  $\frac{1}{x}$  на  $(0;1]$ ;

b)  $\sqrt{x}$  на  $(0;1]$ ;

c)  $x \sin \frac{1}{x}$  на  $(0;1]$ ;

d)  $e^x$  на  $(0;1]$ ;

e)  $\ln(1+x)$  на  $(0;1]$ ;

- 1) a);      2) a) и c);      3) a), c) и e);      4) a) и b);      5) a), b), c) и e).

### Вариант 2

Какие из функций принадлежат классу  $Lip \frac{1}{2}$  (указать все такие функции):

- a).  $\sqrt{x}$  на  $[0;1]$ ;    b).  $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$  на  $(0;1]$ ;    c).  $|x|$  на  $[-1;1]$   
d).  $x^{2/3}$  на  $[0;1]$ ;    e).  $x^{1/4}$  на  $[0;1]$ .  
1) a), b), c) и e);    2) a), b), c) и d);  
3) a), c) и d);    4) a) и c);    5) a) и d).

### Вариант 3

Функция  $f(x) = \sin|x|$  на отрезке  $[-1;1]$  является (указать все правильные ответы):

- a) Ограниченной вариации, но не абсолютно непрерывной.  
b) Абсолютно непрерывной.  
c) Ограниченной вариации и абсолютно непрерывной.  
d) Ограниченной вариации.  
e) Неограниченной вариации.  
1) a), b), c) и e);    2) a), b), c) и d);    3) a), c) и d);  
4) a) и c);    5) a) и d).

### Рефераты и доклады по темам для самостоятельной работы

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
<b>Модуль 1. Классы Гельдера</b>	
1. Классы равномерно непрерывных функций.	Доклад на тему: Глобальные свойства непрерывных функций.
2. Модули непрерывности.	Доклад на тему: Модули непрерывности высших порядков.
3. Классы Липшица, Гельдера.	Доклад на тему: Соотношения между классами Гельдера.
<b>Модуль 2. Классы функций конечной вариации</b>	
1. Монотонные функции.	Доклад на тему: Дифференциальные свойства выпуклых функций.
2. Классы Жордана.	Доклад на тему: Соотношения между классами Липшица и Жордана.
3. Классы Винера, Орлича.	Доклад на тему: Соотношения между классами Гельдера и Орлича.
<b>Модуль 3. Абсолютно непрерывные функции</b>	
1. Свойства абсолютно непрерывных функций.	Доклад на тему: Эквивалентные определения абсолютно непрерывных функций.
2. Задача восстановления функции по ее производной.	Доклад на тему: Интегральное



	представление абсолютно непрерывных функций.
--	--

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Код компетенции из ФГОС ВО	Наименование компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения	Процедура освоения
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	Знает основные свойства непрерывных функций, дифференцируемых функций, функций ограниченной вариации, абсолютно непрерывных функций. Умеет: определить принадлежность индивидуальных функций к тому или иному классу функций; анализировать соотношения между различными классами непрерывных функций. Владеет основными методами теории вложения классов функций действительных переменных.	Изучение тем последовательно по модулям с последующим проведением коллоквиумов и контрольных работ
ПК-3	Обладать способностью строго доказывать утверждение,	Знает: точные определения основных понятий и строгие формулировки основных теорем из теории вложения классов функций	Изучение тем последовательно по модулям с последующим

	сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	действительных переменных. Умеет проводить логически точные математические рассуждения при доказательстве теорем теории вложения классов функций, строго соблюдая при этом причинно-следственные связи. Владеет: классическими методами доказательства основных принципов анализа и важнейших теорем о свойствах функций из основных классов функций действительных переменных.	проведением коллоквиумов и контрольных работ
--	--	---	--

## 7.2. Типовые контрольные задания

### *Примерные вопросы к коллоквиуму*

1. Класс непрерывных функций. Равномерная непрерывность  $2\pi$  - периодических функций.
2. Модуль непрерывности, основные свойства.
3. Классы Липшица, Гельдера.
4. Функции ограниченной вариации.
5. Соотношение классов  $V$  - и  $Lip \alpha$ .
6. Достаточные условия полуаддитивности.
7. Абсолютно непрерывные функции.
8. Соотношение классов  $AC$  и  $Lip \alpha$ .
9. Интеграл Лебега. Классы Лебега  $L_p$ .
10. Классы Винера и Орлича.
11. Оценки модуля непрерывности (сверху и снизу).
12. Сингулярные функции.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### ***а) основная литература:***

1. [Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие](#) - Москва: Наука, 1974

Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной : учебное пособие / И.П. Натансон. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1974. - 480 с. : ил.; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802> ().

2. [Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами](#) - Москва: Наука, 1977

Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами / В.К. Дзядык ; ред. В.В. Абгарян, Л.В. Тайкова. - Москва : Наука, 1977. - 512 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456951> ().

3. [Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного](#) - Москва: Гос. изд-во физико-математической лит., 1960

Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. - Москва : Гос. изд-во физико-математической лит., 1960. - 624 с. - ISBN 978-5-4458-5451-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222399> ().

4. [Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3](#) - Москва: Физматлит, 2002

Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196> ().

#### ***б) дополнительная литература:***

1. [Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения](#) - Москва: Наука, 1976

Корнейчук, Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук ; ред. Б.И. Голубова, Г.Я. Пироговой. - Москва : Наука, 1976. - 320 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456961> ().

2. [Действительный анализ в задачах: учебное пособие](#) - Москва: Физматлит, 2005

Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко и др. - Москва : Физматлит, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331> ().

#### **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека

2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам

3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer

4. <http://edu.dgu.ru/> - Образовательный сервер ДГУ

5. Moodle[Электронный ресурс]: система виртуального обучения: [база данных] / Даг. гос. ун-т. – Махачкала, г. – Доступ из сети ДГУ или, после регистрации из сети ун-та, из любой точки, имеющей доступ в интернет. – URL: <http://moodle.dgu.ru/>).

#### **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Учебная программа по дисциплине распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к докладу или реферату, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники. При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

#### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Университет обладает достаточной базой оснащенных аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.