

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка

**Кафедра прикладной математики факультета математики и
компьютерных наук**

Образовательная программа
01.03.02-прикладная математика и информатика

Профиль подготовки
Математическое моделирование и вычислительная математика

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: ***Вариативная по выбору***

Махачкала, 2017

Рабочая программа по дисциплине Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 – прикладная математика и информатика (уровень бакалавр)

от « 12 » марта 2015 г. № 228

Разработчики:

1. кафедра прикладной математики, Бейбалаев В.Д. к.ф.-м. н., доцент;

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от « 7 » 03 2017г., протокол №7 Зав. кафедрой Кадиев Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «10» марта 2017 г., протокол № 4.

Председатель Меджидов / Меджидов З.Г.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением « 27 » 03 2017г.
(подпись)

Рабочая программа по дисциплине Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 – прикладная математика и информатика (уровень бакалавр)

от «_12_» марта_2015 г. № 228

Разработчики:

1. кафедры прикладной математики, Бейбалаев В.Д. к.ф.-м. н., доцент;

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от «_7_» 03_2017г., протокол №7 Зав. кафедрой _____ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «10» __марта_2017_г., протокол №_4__.

Председатель _____ Меджидов З.Г.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением « ____ » _____ 20 __ г. _____

(подпись)

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка входит в вариативную по выбору часть образовательной программы *бакалавра* по направлению 01.03.02 – Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с численными методами решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка и освоением численных методов решения задач для дифференциальных уравнений дробного порядка.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: профессиональных –ПК-2, ПК-3, ПК-4.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лабораторные работы и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме контрольных и лабораторных работ и промежуточный контроль в форме зачета и экзамена.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	в том числе							
	Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем						
		из них						
Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации				
6	108	16	32				60	Экзамен
Итого:	108	16	32				60	

1. Цели освоения дисциплины

Цель изучения курса «Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка» - владение студентами навыков численного решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, разработки алгоритмов численного решения математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка и умение проводить расчетно-графические работы.

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка» входит в вариативную часть образовательной программы *бакалавра* по направлению (специальности) 01.03.02 – Прикладная математика и информатика.

Курс «Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка» вводится после изучения дисциплин алгебра, информатика, математический анализ, дифференциальные уравнения, так как для успешного усвоения этого курса студентам необходимы знания по указанным дисциплинам.

Изученные в курсе численные методы могут использовать при численном моделировании различных нелокальных процессов естествознании.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ПК-2	способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Знать: основы математического анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальных уравнений дробного порядка и численных методов .

		<p>Уметь: совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении практических задач.</p> <p>Владеть: навыками численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка и разработки алгоритмов численного расчета.</p>
ПК-3	Способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности	<p>Знать: математические методы моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов.</p> <p>Уметь: критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности.</p> <p>Владеть: навыками применения накопленных знаний и опыта для изменения при необходимости вида и характера своей деятельности</p>
ПК-4	Способность работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности.	<p>Знать: математические методы исследования процессов естествознания и имитационного моделирования различных производственных процессов.</p> <p>Уметь: работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности.</p> <p>Владеть: навыками математического и имитационного моделирования для решения задач научно-исследовательского и производственного характера.</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 5 зачетные единицы 180 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)					Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические	Лаб. Раб.	Сам. раб.		
Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка									
1	Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля, Сарито, Грюнвальда-Летникова.	6	1	1		2	2	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.	
2	Приближенное вычисление производных дробного порядка	6	2-3	1		4	2	-----	
3	Обыкновенные дифференциальные дробного порядка.	6	4-5	2		4	2	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.	
4	Численные методы решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка	6	6-7	2		4	2	---	
7	Порядок точности и сходимость численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка	6	8	2		2	4	-----	

Итого по модулю 1:				8		16	12	
Модуль 2. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка								
8	Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка.	6	9-11	2		6	4	Индивидуальный фронтальный опрос, лабораторная работа.
9	Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка.	6	12-14	4		6	4	-----
10	Численные методы решения краевых задач для двумерного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка.	6	15-16	2		4	4	-----
Итого по модулю 2:				8		16	12	
Итого по 6 семестру:				16		32	24	
Модуль 5. Подготовка к экзамену								
Подготовка к экзамену							36	
ИТОГО:				16		32	60	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1. Интегралы и производные дробного порядка

Тема 1. Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля. Дробная производная Caputo, аппроксимация дробной производной Caputo. Дробная производная Грюнвальда-Летникова. Интегральное уравнение Абеля. Разрешимость уравнения Абеля в классе интегрируемых

функций. Определения дробного интеграла и производной Римана-Лиувилля и их свойства. Дробная производная Римана-Лиувилля на оси и полуоси. Дробные производные высших порядков. Примеры вычислений дробных интегралов и производных.

Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной. Аппроксимация дробной производной Caputo, порядок аппроксимации.

Определение дробной производной Грюнвальда-Летникова. Связь между дробной производной Римана-Лиувилля и дробной производной Грюнвальда-Летникова. Формулы Грюнвальда-Летникова для приближенного вычисления дробной производной.

Тема 2. Приближенное вычисление производных дробного порядка. Аппроксимация дробной производной Римана-Лиувилля, порядок аппроксимации. Примеры приближенных вычислений дробных производных.

Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка. Некоторые специальные функции. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка. Задача типа Коши. Существование и единственность решения задачи типа Коши.

Тема 4. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.

Численные методы решения задачи типа Коши. Порядок аппроксимации разностной схемы. Алгоритм численного решения задачи типа Коши.

Тема 5. Порядок точности и сходимости численных методов решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка. Порядок точности разностной схемы аппроксимирующей задачу Коши для ОДУ дробного порядка и сходимости. О зависимости сходимости разностных методов решения задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка от шага.

Модуль 2. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка

Тема 1. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с производной дробного порядка. Частные производные дробного порядка, аппроксимация, порядок аппроксимации. Краевая задача для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка. Существование и единственность решения краевой задачи. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, порядок точности и сходимости.

Тема 2. Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка. Аппроксимация двусторонней производной дробного порядка, порядок

аппроксимации. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка, порядок точности, сходимость.

Тема 3. Численные методы решения краевых задач для двумерного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка. Аппроксимация частной производной дробного порядка, порядок аппроксимации. Разностная схема аппроксимирующая краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, порядок точности, сходимость.

5. Образовательные технологии

Лабораторные работы проводятся в компьютерных классах с использованием меловой доски и мультимедийного проектора. Для проведения лабораторных занятий необходима аудитория, оснащенная компьютерами, мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации слайд-презентаций).

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Лабораторные работы содержатся в пособиях, указанных в списке учебной литературы.

6.1. Виды и порядок выполнения самостоятельной работы.

1. Изучение рекомендованной литературы.
2. Подготовка к отчетам по лабораторным работам.
3. Решение задач.
4. Подготовка к зачету и экзамену.

6.2. Темы для самостоятельного изучения:

1. Дробная производная Рисса, аппроксимация, порядок аппроксимации. (см. [1-4] раздела 8)
2. Численное исследование математической модели «фрактального» осциллятора, фазовая плоскость. (см. [5] раздела 8)
3. Линейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. (см. [3] раздела 8)
4. Нелинейные динамические системы, описываемые производными дробного порядка. (см. [3] раздела 8)
5. Нелинейное уравнение теплопроводности с дробными производными. (см. [5] раздела 8)

6.3. Темы для рефератов:

1. Математическая концепция фрактала. Фрактальная размерность.
2. Численное исследование нелокальной модели Дуффинга и его странные аттракторы.
3. Численное моделирование нелокальных процессов промерзания в

средах с фрактальной структурой.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ПК-2	Знать: основы математического анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальных уравнений дробного порядка и численных методов . Уметь: совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении практических задач. Владеть: навыками численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка и разработки алгоритмов численного расчета.	Лабораторные работы, контрольные работы, зачет
ПК-3	Знать: математические методы моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов. Уметь: критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей	Лабораторные работы, контрольные работы, зачет

	профессиональной деятельности. Владеть: навыками применения накопленных знаний и опыта для изменения при необходимости вида и характера своей деятельности	
ПК-4	Знать: математические методы исследования процессов естествознания и имитационного моделирования различных производственных процессов. Уметь: работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности. Владеть: навыками математического и имитационного моделирования для решения задач научно-исследовательского и производственного характера.	Лабораторные работы, контрольные работы, зачет

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

Схема оценки уровня формирования компетенции «способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат»

ПК-2

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично

Пороговый	Уметь: совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении практических задач.	Демонстрирует слабые знания математического аппарата	Может использовать математический аппарат для численного исследования дифференциальных уравнений дробного порядка.	Может эффективно использовать математический аппарат для численного исследования дифференциальных уравнений дробного порядка и осуществлять расчетно-графические работы.
-----------	--	--	--	--

ПК-3

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	Знать: математические методы моделирования различных физических, биологических, химических и экономических процессов. Уметь: критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности. Владеть: навыками	Имеет неполное представление об основах математического моделирования, получения и обработки информации	Допускает неточности в понимании основ математического моделирования, получения и обработки информации	Демонстрирует четкое представление об основах математического моделирования, получения и обработки информации

	применения накопленных знаний и опыта для изменения при необходимости вида и характера своей деятельности			
--	---	--	--	--

ПК-4

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<p>Знать: математические методы исследования процессов естествознания и имитационного моделирования различных производственных процессов.</p> <p>Уметь: работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности.</p>	Демонстрирует слабое умение осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке корректности и эффективности моделей	Может осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке корректности и эффективности моделей	Может эффективно осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке корректности и эффективности математических моделей

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительная оценки по дисциплине быть не может.

7.3. Типовые контрольные задания

Численные методы решения ОДУ дробного порядка

Вариант 1

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$\begin{cases} D_{0x}^\alpha y = \frac{y^2}{x^2+1} - (x-1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

при $\alpha=0,5$ на отрезке $[0;0,4]$ с шагом $h=0,1$.

2. Найти приближенное решение с шагом $h=0,1$ на отрезке $[0;0,5]$ при $\alpha=0,5$

$$\begin{cases} D_{0x}^\alpha y = x(y-x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$\begin{cases} D_{0x}^\alpha y = \frac{y^2}{x+1} - x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

при $\alpha=0,5$ на отрезке $[0;0,5]$ с шагом $h=0,1$.

2. Найти приближенное решение задачи типа Коши с шагом $h=0,05$ на отрезке $[0;0,3]$ при $\alpha=0,5$

$$\begin{cases} D_{0x}^\alpha y = xy - (x+1)^2 + 2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Ориентировочный перечень вопросов к зачету по всему курсу

1. Интегральное уравнение Абеля и его разрешимость в классе интегрируемых функций.
2. Определения дробного интеграла Римана-Лиувилля и его свойства.
3. Определение дробной производной на отрезке. Свойства.
4. Дробная производная на оси и полуоси.
5. Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной.
6. Дробная производная Грюнвальда-Летникова и ее свойства.
7. Аппроксимация дробной производной. Порядок аппроксимации.
8. ОДУ дробного порядка. Задача типа Коши для ОДУ дробного порядка. Существование и единственность решения.
9. Численное решение задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка.
10. Порядок точности и сходимость численного метода решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.

Ориентировочный перечень вопросов к экзамену по всему курсу

1. Интегральное уравнение Абеля и его разрешимость в классе интегрируемых функций.
2. Определения дробного интеграла Римана-Лиувилля и его свойства.
3. Определение дробной производной на отрезке. Свойства.
4. Дробная производная на оси и полуоси.
5. Дробная производная Caputo. Достаточное условие существования дробной производной.
6. Дробная производная Грюнвальда-Летникова и ее свойства.
7. Аппроксимация дробной производной. Порядок аппроксимации.
8. ОДУ дробного порядка. Задача типа Коши для ОДУ дробного порядка. Существование и единственность решения.
9. Численное решение задачи типа Коши для ОДУ дробного порядка.
10. Порядок точности и сходимость численного метода решения задачи Коши для ОДУ дробного порядка.
11. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для ОДУ дробного порядка, порядок аппроксимации, порядок точности, сходимость.
12. Аппроксимация частной производной дробного порядка.
13. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, сходимость.
14. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка, сходимость.
15. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, сходимость.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 30 % и промежуточного контроля – 70 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 20 баллов,
- участие на лабораторных занятиях - 20 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 60 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- лабораторная работа - 40 баллов,

- письменная контрольная работа - 60 баллов,

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

а) основная литература:

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск: Наука и Техника, 1987.- 688с.
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000.- 299с.
3. Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.- ИПЦ ДГУ.- 2012.- 85 с.
4. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка.- Ж. вычисл. Матем. И матем. Физики., 2006, 46:10.- С. 1871-1881.
5. Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шахбанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления. Palmarium Academic Publishing.-2012.-135 с.

б) дополнительная литература:

1. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. -Вып. 6, 2008. -С.46-53.

2. Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И. А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования.- Вестник ДГУ, вып. 6.- 2014.- С. 53-61.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: / Руководитель проекта Ризниченко Г. Ю. URL: <http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=53>.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Для успешного освоения курса студентам рекомендуется проводить самостоятельный разбор материалов лабораторных занятий в течение семестра. В случае затруднений в понимании и освоении каких-либо тем решать дополнительные задания из учебных пособий, рекомендуемых к данному курсу.

11. Перечень информационных технологий, используемых при

осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: пакеты для решения задач математического программирования: MathCAD и Mat LAB, объектно-ориентированное программирование в среде Delphi и C++.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

4 компьютерных класса на математическом факультете (40 компьютеров), оснащенных аудио и видеоаппаратурой.