

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Теория операторов

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

01.03.01- Математика

Профиль подготовки

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Уровень высшего образования

бакалавриат

Форма обучения

очная

Статус дисциплины: **вариативная**

Махачкала 2017

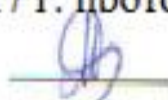
Рабочая программа дисциплины: **Теория операторов**
составлена 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по
направлению подготовки 01.03.01. Математика (уровень
бакалавриат)

Приказ Минобрнауки России от 12. 03 2015 №228

разработчик: к. ф.-м.н., доцент кафедры
дифференциальных уравнений и функционального анализа
Меджидов Зияудин Гаджиевич

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании
кафедры: дифференциальных уравнений и функционального
анализа от "22" марта 2017 г. протокол № 6

Заведующий кафедрой



Сиражудинов М.М.

на заседании Методического совета факультета
Математики и компьютерных наук от 24 марта 2017 г.

Председатель



Рабочая программа согласована с
учебно-методическим
управлением 30 марта 2017



(подпись)

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины	4
1. Цели освоения дисциплины.....	5
2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата.....	5
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).....	5
4. Объем, структура и содержание дисциплины.	7
5. Образовательные технологии.....	9
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов	9
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины	11
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.....	19
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	19
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.	20
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.	20
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.	21

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Теория операторов» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.01–Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, относящихся к теории самосопряженных операторов, спектральной теории операторов и дифференциальному исчислению нелинейных операторов.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

общефессиональных – ОПК-1, ОПК-3,
профессиональных – ПК-1, ПК-2, ПК-3.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *контрольных работ и коллоквиумов*, промежуточный контроль в форме *зачета*.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Се- местр	Учебные занятия							Форма промежу- точной ат- тестации (зачет, дифферен- цирован- ный зачет, экзамен)	
	Все го	в том числе							СРС
		Контактная работа обучающихся с преподавателем							
		из них							
Лек- ции	Лабора- торные занятия	Практи- ческие занятия	КСР	кон- сульта- ции					
8	108	32		18			58	Зачет	

1. Цели освоения дисциплины

- Базовая подготовка бакалавра в области теории операторов,
- Выстраивание общего контекста математического мышления как культурной формы деятельности, определяемой как структурными особенностями математического знания, так и местом математики в системе наук.
- Развитие способности применять общие методы анализа и теории функций к конкретным прикладным задачам.
- Развитие способности переходить от частных результатов к общему и выстраивать общую теорию.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *Теория операторов* относится к вариативной части образовательных дисциплин. Изучению этой дисциплины должны предшествовать курсы: математический и функциональный анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения.

На курс *Теория операторов* опираются практически все математические специальные курсы по теории дифференциальных уравнений, уравнений типа свёртки, теории сингулярных интегральных уравнений, теории разностных уравнений, теории краевых задач для аналитических функций, теории численных методов.

Курс *Теория операторов* является логическим продолжением курса функционального анализа, и для его освоения студент должен знать теорию линейных операторов в конечномерных линейных пространствах, теорию бесконечномерных линейных нормированных пространств, владеть основами теории линейных операторов в рамках курса функционального анализа.

Знания, умения и навыки, полученные в результате освоения данной дисциплины, будут нужны при написании выпускных квалификационных работ по соответствующей тематике, а также при дальнейшей учебе в магистратуре.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической	Знать: базовые определения и теоремы теории линейных и нелинейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах, методы решения операторных уравнений в конкретных пространствах. Уметь: использовать знания в области математического анализа, комплексного и функцио-

	геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	нального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальных уравнений для иллюстрации общих теорем данной дисциплины. Владеть: методами постановки и решения задач разных областей математики и естествознания в операторном виде.
ОПК-3	Способность к самостоятельной научно-исследовательской работе	Знать: методику применения теории линейных и нелинейных операторов к решению исследовательских и практических задач Уметь: записывать явления и процессы в операторном виде, применять теорию самосопряженных операторов к решению краевых задач. Владеть: операторными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений.
ПК-1	Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	Знать: основные понятия и методы теории операторов в банаховых пространствах. Уметь: применять теорию вполне непрерывных операторов к исследованию разрешимости интегральных уравнений, к построению резольвент различных операторов. Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.
ПК-2	Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	Знать: условия применимости тех или иных операторных методов к решению конкретной задачи. Уметь: формулировать задачи классического анализа в операторном виде, обосновывать результат. Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в операторном виде.
ПК-3	Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Знать: точные формулировки базовых теорем, их частные случаи, контрпримеры к теоремам. Уметь: применять методы теории операторов к решению задач математической физики, численных методов, вариационного исчисления. Владеть: методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр.сам. раб.	Самост. работа	
Модуль 1. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве									
1	Вполне непрерывные и сопряженные операторы	8	1-2	4	2			6	Устный опрос
2	Теоремы Фредгольма и их применение	8	3	4	2			8	Тестирование
3	Нормально разрешимые операторы	8	4-5	4	2			8	Контрольная работа
	<i>Итого по модулю 1</i>			12	6			20	Коллоквиум
Модуль 2. Элементы спектральной теории линейных операторов									
1	Спектр и резольвента	8	6-7	4	2			8	Устный опрос
2	Спектральное разложение операторов	8	8	6	4			10	Устный опрос
	<i>Итого по модулю 2</i>			10	6			18	Контрольная работа
Модуль 3. Дифференцирование нелинейных операторов									
1	Сильный и слабый дифференциал	8	11-13	6	4			10	Устный опрос
2	Теорема о неявной функции	8	14-15	4	2			10	Тестирование
	<i>Итого по модулю 3</i>			10	6			20	Коллоквиум
	ИТОГО			32	18			58	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Тема 1. Вполне непрерывные и сопряженные операторы.

Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Определение и свойства. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора. Квадратный корень из неотрицательного оператора.

Тема 2. Теоремы Фредгольма и их применение.

Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве. Применение к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Интегральные уравнения 2-го рода, содержащие параметр. Решение с помощью итерированных ядер. Метод определителей Фредгольма решения интегральных уравнений, содержащих параметр.

Тема 3. Нормально разрешимые операторы

Нормально разрешимые операторы. Нетеровы и фредгольмовы операторы. Теорема Никольского. Априорные оценки и вопросы разрешимости линейных уравнений.

Модуль 2. Элементы спектральной теории линейных операторов

Тема 4. Спектр и резольвента

Собственные значения, собственные векторы, спектр и резольвента линейного оператора. Спектр самосопряженного ограниченного оператора. Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора. Спектр и резольвента неограниченных операторов.

Тема 5. Спектральное разложение операторов

Операторы ортогонального проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве и их свойства. Интегрирование абстрактных функций. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве. Спектральная теорема для вполне непрерывного оператора. Спектральная функция самосопряженного оператора. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора.

Модуль 3. Дифференцирование нелинейных операторов

Тема 6. Сильный и слабый дифференциал

Производные Фреше и Гато. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью. Формула Тейлора.

Тема 7. Теорема о неявной функции

Теорема о неявной функции. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных

5. Образовательные технологии

Курс *Теория операторов* является математическим курсом, насыщенным большим числом понятий, теорем и формул. Поэтому наиболее целесообразной формой проведения занятий является *классическая лекция*. На самостоятельную работу в виде рефератов и докладов студентов выносятся наиболее важные типы и классы конкретных операторов, возникающие в многочисленных и разнообразных приложениях. Активные формы занятий составляют около 20% аудиторных часов.

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. При проведении отдельных занятий материал может параллельно транслироваться на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций).

В процессе преподавания дисциплины могут быть применены такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция-визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

По теме «Спектральная теория линейных операторов» целесообразно провести мастер-класс с приглашением специалистов по дифференциальным уравнениям.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведен примерный вариант самостоятельной работы. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебные пособия [1] – [5] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерный вариант самостоятельной работы по теме «Сильный и слабый дифференциал»

СР-1

1. Доказать теорему о производной сложной функции. Пусть X, Y, Z – три банаховых пространства, $U(x_0)$ – окрестность точки x_0 в X , A – непрерывное отображение этой окрестности в Y , $y_0 = Ax_0$, $V(y_0)$ – окрестность точки $y_0 \in Y$, и B – непрерывное отображение этой окрестности в Z . Тогда, если отображение A дифференцируемо (в смысле Фреше) в точке x_0 , а B дифференцируемо в точке y_0 , то отображение $C = BA$ (определенное

и непрерывное в некоторой окрестности точки x_0) дифференцируемо в точке x_0 и

$$C'(x_0) = B'(y_0) \cdot A'(y_0).$$

2. Пусть функция $\varphi(x, \xi, u)$ непрерывна по совокупности своих переменных при $a \leq x, \xi \leq b, -\infty < u < +\infty$ вместе частной производной $\varphi_u(x, \xi, u)$ и

$$F(u) = u(x) - \int_a^b \varphi(x, \xi, u(\xi)) d\xi.$$

Доказать, что оператор F дифференцируем в каждой точке $u_0 \in C[a, b]$ и

$$F'(u_0)(h) = h(x) - \int_a^b \varphi_u(x, \xi, u_0(\xi)) d\xi.$$

3. На примере функции

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

проверить, что из слабой дифференцируемости оператора в точке еще не вытекает его сильная дифференцируемость.

4. На примере скалярной функции $f(t) = t^3 \cos \frac{1}{t^2}$ проверить, что из существования второй производной Фреше оператора в точке (в частном случае при $t = 0$) не вытекает существование второй производной Гато.

5. Найти производные Фреше функционалов $F(x) = (x, x)$ и $G(x) = \|x\|$ в вещественном гильбертовом пространстве.

6. Пусть функции $f(x, u)$ и $f_u(x, u)$ непрерывны по совокупности переменных при $x \in [a, b], -\infty < u < \infty$. Рассмотрим оператор $F: C[a; b] \rightarrow C[a; b], F(u) = f(x, u(x))$. Доказать, что производная F в точке $u_0(x) \in C[a; b]$ и ее дифференциал в этой точке при приращении $h(x) \in C[a; b]$ соответственно равны

$$F'(u_0) = f_u(x, u_0(x)); \quad dF(u_0; h) = f_u(x, u_0(x))h(x).$$

7. Найти производную Фреше оператора $F(u) = u(x) - e^{xu(x)}$ в пространстве $C[0; 1]$ в точке $u_0(x) \equiv 0$.

6.3. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Модуль 1. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	

1. Вполне непрерывные и сопряженные операторы.	Доклады на темы: 1. Теоремы Нётера. 2. Отношения между подпространствами и ортопроекторы.
2. Теоремы Фредгольма и их применение.	Доклад на тему Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром
Модуль 2. Элементы спектральной теории линейных операторов	
1.Спектр и резольвента	Решение задач и упражнений
2.Спектральное разложение операторов.	Доклады на темы: 1. Интеграл Стильтеса от абстрактной функции. 2. Квадратичная форма оператора и ее свойства
Модуль 3. Дифференцирование нелинейных операторов	
1. Сильный и слабый дифференциал	Решение задач и упражнений
2. Теорема о неявной функции	Доклад на тему: применение теоремы о неявной функции к дифференциальным уравнениям

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-1	Знать: базовые определения и теоремы теории линейных и нелинейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах, методы решения операторных уравнений в конкретных пространствах. Уметь: использовать знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальных уравнений для иллюстрации общих теорем данной дисциплины. Владеть: методами постановки и решения задач разных областей матема-	Повторение постановок задач и их решения в классическом анализе, сравнение с аналогичными задачами в операторном виде. Проверка освоения в виде устного опроса и тестирования.

	тики и естествознания в операторном виде.	
ОПК-3	<p>Знать: методику применения теории линейных и нелинейных операторов к решению исследовательских и практических задач</p> <p>Уметь: записывать явления и процессы в операторном виде, применять теорию самосопряженных операторов к решению краевых задач.</p> <p>Владеть: операторными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений..</p>	Проверка освоения материала в виде контрольной работы
ПК-1	<p>Знать: основные понятия и методы теории операторов в банаховых пространствах.</p> <p>Уметь: применять теорию вполне непрерывных операторов к исследованию разрешимости интегральных уравнений, к построению резольвент различных операторов.</p> <p>Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.</p>	Изучение тем дисциплины по лекциям, основной литературе [1] – [4], на практических занятиях решать упражнения из книг [4], [5]; выступления с докладами.
ПК-2	<p>Знать: условия применимости тех или иных операторных методов к решению конкретной задачи.</p> <p>Уметь: формулировать задачи классического анализа в операторном виде, обосновывать результат.</p> <p>Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в операторном виде.</p>	Выступление с докладами, рекомендованными для самостоятельной работы по освоению модулей; тестирование.
ПК-3	<p>Знать: точные формулировки базовых теорем, их частные случаи, контрпримеры к теоремам.</p> <p>Уметь: применять методы теории операторов к решению задач математической физики, численных методов, вариационного исчисления.</p> <p>Владеть: методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.</p>	Выполнение самостоятельных работ. Устный опрос. Круглый стол на тему «Применение дифференциального исчисления нелинейных операторов».

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ОПК-1 «Готовность использовать фундаментальные знания в области мате-

матического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О В Ы Й	<p>Знать: базовые определения и теоремы теории линейных и нелинейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах, методы решения операторных уравнений в конкретных пространствах.</p> <p>Уметь: использовать знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальных уравнений для иллюстрации общих теорем данной дисциплины.</p> <p>Владеть: методами постановки и решения задач разных областей математики и естествознания в операторном виде.</p>	<p>Знает операторные методы исследования интегральных уравнений 2-го рода и краевых задач.</p> <p>Умеет строить резольвенты операторов, действующих в основных пространствах.</p> <p>Владеет навыками дифференцирования нелинейных операторов.</p>	<p>Знает операторные методы исследования интегральных уравнений 1-го и 2-го рода, краевых задач.</p> <p>Умеет строить резольвенты и производить спектральное разложение операторов, действующих в основных пространствах.</p> <p>Владеет методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.</p>	<p>Знает базовые определения и теоремы теории линейных и нелинейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах, методы решения операторных уравнений в конкретных пространствах.</p> <p>Умеет использовать знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальных уравнений для иллюстрации общих теорем данной дисциплины.</p> <p>Владеет методами постановки и решения задач разных областей математики и естествознания в операторном виде.</p>

ОПК-3 «Способность к самостоятельной научно-исследовательской работе»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О В Ы Й	<p>Знать: методику применения теории линейных и нелинейных операторов к решению исследовательских и практических задач</p> <p>Уметь: записывать явления и процессы в операторном виде, применять теорию самосопряженных операторов к решению краевых задач.</p> <p>Владеть: операторными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений.</p>	<p>Знает методику применения теории линейных операторов к решению исследовательских и практических задач.</p> <p>Умеет записывать явления и процессы в операторном виде, применять теорию самосопряженных операторов к решению краевых задач.</p> <p>Владеет операторными методами решения интегральных уравнений 2-го рода.</p>	<p>Знает методику применения теории линейных и нелинейных операторов к решению отдельных исследовательских и практических задач</p> <p>Умеет записывать явления и процессы в операторном виде, применять теорию самосопряженных операторов к решению краевых задач.</p> <p>Владеет операторными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений 1-го и 2-го рода.</p>	<p>Знает методику применения теории линейных и нелинейных операторов к решению исследовательских и практических задач</p> <p>Умеет записывать явления и процессы в операторном виде, применять теорию самосопряженных операторов к решению краевых задач.</p> <p>Владеет операторными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений.</p>

ПК-1 «Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О	<p>Знать: основные понятия и методы теории операторов в банаховых пространствах.</p> <p>Уметь: применять теорию вполне непрерывных операторов к исследованию разрешимости</p>	<p>Знает основные понятия и методы теории операторов в конечномерных пространствах.</p> <p>Умеет применять теорию вполне</p>	<p>Знает основные понятия и методы теории операторов в конечномерных и гильбертовых пространствах.</p> <p>Умеет приме-</p>	<p>Знает основные понятия и методы теории операторов в банаховых пространствах.</p> <p>Умеет применять теорию вполне непрерывных</p>

В ы й	мости интегральных уравнений, к построению резольвент различных операторов. Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.	непрерывных операторов к исследованию разрешимости интегральных уравнений. Владеет грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.	нять теорию вполне непрерывных операторов к исследованию разрешимости интегральных уравнений, к построению резольвент операторов в гильбертовом пространстве. Владеет грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.	операторов к исследованию разрешимости интегральных уравнений, к построению резольвент различных операторов. Владеет грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.
-------------	---	---	--	---

ПК-2

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П о р о г о в ы й	Знать: условия применимости тех или иных операторных методов к решению конкретной задачи. Уметь: формулировать задачи классического анализа в операторном виде, обосновывать результат. Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в операторном виде.	Знает условия применимости тех или иных операторных методов к решению отдельных задач. Умеет формулировать отдельные задачи классического анализа в операторном виде. Владеет методами постановки и решения задач	Знает условия применимости тех или иных операторных методов к решению задач данной области. Умеет формулировать основные задачи классического анализа в операторном виде. Владеет методами постановки и решения физи-	Знает условия применимости тех или иных операторных методов к решению задач из различных областей математики. Умеет формулировать задачи классического анализа в операторном виде, обосновывать результат. Владеет методами постановки и решения задач мате-

		математики в операторном виде.	ческих и математических задач в операторном виде.	матики и естествознания в операторном виде.
--	--	--------------------------------	---	---

ПК-3

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О В Ы Й	Знать: точные формулировки базовых теорем, их частные случаи, контрпримеры к теоремам. Уметь: применять методы теории операторов к решению задач математической физики, численных методов, вариационного исчисления. Владеть: методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.	Знает точные формулировки базовых теорем, доказательства в частных случаях. Умеет применять методы теории операторов к решению задач математической физики. Владеет методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.	Знает точные формулировки базовых теорем, их частные случаи и применения. Умеет применять методы теории операторов к решению задач математической физики, численных методов. Владеет методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.	Знает точные формулировки базовых теорем, их частные случаи, контрпримеры к теоремам. Умеет применять методы теории операторов к решению задач математической физики, численных методов, вариационного исчисления. Владеет методами дифференциального исчисления нелинейных операторов.

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

7.3. Типовые контрольные задания

1.3.1 Примерные темы рефератов по дисциплине:

1. Спектр компактного оператора.
2. Односторонне обратимые операторы.
3. Теорема о замкнутом графике и ее следствия.
4. Интегрирование абстрактных функций.
5. Интегральные уравнения 1-го рода.

6. Абсолютная норма оператора.
7. Теорема Гильберта-Шмидта.
8. Задачи на экстремум в нормированных пространствах. Теорема Люстерника.

1.3.2 Примерные контрольные вопросы для подготовки к зачету

1. Сопряженный оператор. Определение и свойства.
2. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
3. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
4. Нормально разрешимые операторы.
5. Нетеровы и фредгольмовы операторы.
6. Теорема Никольского.
7. Априорные оценки и вопросы разрешимости линейных уравнений.
8. Операторы ортогонального проектирования на подпространство в гильбертовом пространстве и их свойства.
9. Спектр и резольвента линейного оператора.
10. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма самосопряженного оператора.
11. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве.
12. Спектральная теорема для вполне непрерывного оператора.
13. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра 2-го рода. Решение в случае вырожденных и симметричных ядер.
14. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Решение с помощью итерированных ядер.
15. Метод определителей Фредгольма решения интегральных уравнений, содержащих параметр.
16. Спектральная теорема для самосопряженного ограниченного оператора.
17. Спектр самосопряженного ограниченного оператора.
18. Спектр и резольвента неограниченных операторов.
19. Производные Фреше и Гато.
20. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью.
21. Теорема о неявной функции в банаховом пространстве и ее применения.

1.3.3 Примерные варианты контрольных работ по теме «Вполне непрерывные и сопряженные операторы»

КР 1

1. Является ли оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ вполне непрерывным?

2. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, если $Ax(t) = tx(t)$.
3. Доказать, что оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство вполне непрерывен.
4. Является ли оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds$, вполне непрерывным?
5. Является ли оператор $A: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1], Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$, вполне непрерывным?
6. Доказать формулы для нормы самосопряженного оператора

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|; \|A\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(Ax, y)|.$$
7. Пусть A – самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве. Доказать, что для любого $\lambda > 0$ оператор $A + \lambda I$ непрерывно обратим.

КР-2

1. Является ли оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = x(0) + tx(1)$, вполне непрерывным?
2. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 tx(s) ds$.
3. Является ли оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = \int_0^1 x(s) ds$, вполне непрерывным?
4. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 sx(s) ds$.
5. Пусть A – самосопряженный непрерывно обратимый оператор в гильбертовом пространстве. Доказать, что обратный оператор A^{-1} также самосопряженный.
6. Пусть A – самосопряженный неотрицательный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. Доказать, что квадратный корень \sqrt{A} вполне непрерывен.
7. Пусть вполне непрерывный самосопряженный оператор A в бесконечномерном гильбертовом пространстве H имеет конечное множество собственных значений. Доказать, что $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A .

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

- 1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 624 с.
- 2) Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
- 3) Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Дрофа, 2003, 384 с.
- 4) Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 488 с.

б) дополнительная литература:

- 5) Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. М.: URSS, 2010, 480 с.
- 6) Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, М.: Наука, 1977, 741 с.
- 7) Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979, 592 с.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. Федеральный портал <http://edu.ru>:
2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ:
<http://elib.dgu.ru>:
<http://edu.icc.dgu.ru>:

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Операторный язык является основным языком многих современных направлений математики. Дисциплина «Теория операторов» способствует выработке этого языка у будущих бакалавров. Поэтому творческое овладение этой дисциплиной особенно важно для тех, кто собирается продолжить учебу в магистратуре и аспирантуре по различным направлениям. Специфика дисциплины состоит в том, что здесь путем установления общих закономерностей обобщаются такие базовые понятия классического анализа и линейной алгебры, как обратимость функции, производная, симметричная матрица и др. Обобщение этих понятий не только расширяет круг решаемых задач, но и значительно упрощает решение этих задач, автоматизируя многие математические операции.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Спектральная теория линейных операторов» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы «Дифференциальные уравнения» и «Системы линейных алгебраических уравнений».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников, рекомендованных в п. 8: [1],[2],[4],[5].

Решать задачи и упражнения из учебных пособий и задачников: [3], [4], [5].

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Теория операторов» необходимы:

Системное программное обеспечение: ОС Windows 7/8/10;

Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/2010/2013; Mathcad.

Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-30 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.