



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования**

**«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

*Факультет математики и компьютерных наук*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Векторный и тензорный анализ**

*Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа  
факультета математики и компьютерных наук*

**Направление подготовки**

**03.03.02– ФИЗИКА**

**Профиль подготовки**

***Фундаментальная физика***

Уровень высшего образования

**бакалавриат**

Форма обучения

**очная**

Статус дисциплины: **базовая**

**Махачкала - 2017**

Рабочая программа по дисциплине:


**Векторный и тензорный анализ**

составлена в 2017 году в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки: 03.03.02 Физика (уровень подготовки бакалавриат). Приказ Минобрнауки России № 937 от 7.08.2014 г.


разработчик: кф.-м.н. доцент кафедры  
дифференциальных уравнений и функционального анализа


**Меджидов Зиядин Гаджиевич**

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании  
кафедры: дифференциальных уравнений и функционального  
анализа от "22" марта 2017 г. протокол № 6

Заведующий кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методического совета факультета  
Математики и компьютерных наук от 24 марта 2017 г.

Председатель 

Рабочая программа согласована с  
учебно-методическим  
управлением 30.03.2017 г. 

## Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины .....	4
1. Цели освоения дисциплины.....	5
2. . Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата.....	5
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).....	6
4. Объем, структура и содержание дисциплины. ....	6
5. Образовательные технологии.....	9
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. ....	9
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины .....	12
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.....	17
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	18
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины. ....	18
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем. ....	19
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине. ....	19

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» входит в базовую часть образовательной программы бакалавриата по направлению 03.03.02–Физика.

Дисциплина реализуется на физическом факультете кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Элементы векторного и тензорного анализа широко применяется во всех разделах физики. Курс направлен на формирование представлений и навыков работы с математическими объектами тензорного характера, которые составляют основу инвариантного математического аппарата, широко используемого как в общей (электричество и магнетизм), так и в теоретической физике (теоретическая механика, электродинамика, основы механики сплошных сред, квантовая механика и т.д.). Данный курс является также основой для большинства курсов специальной подготовки.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
обще профессиональных –ОПК-2.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *2-х коллоквиумов (модулей)*, промежуточный контроль в форме *зачета*.

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Се- местр	Учебные занятия						СРС	Форма промежу- точной ат- тестации
	Все- го	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с пре- подавателем						
		из них						
Лек- ции	Лабора- торные занятия	Практи- ческие занятия	КСР	Кон- суль- тации				
3	72	16		18			38	Зачет

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель дисциплины – изучения основных теоретических положений векторного и тензорного анализа, действий над векторными и тензорными полями, освоение способов применения аппарата векторного и тензорного исчисления для решения задач теоретической механики, физики, механики сплошной среды.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения».

По завершении изучения дисциплины студент должен:

- знать основные положения векторного и тензорного анализа;
- уметь формулировать в терминах векторного и тензорного анализа задачи физики, теоретической механики, некоторых задач механики сплошной среды и строить соответствующие решения этих задач;
- владеть навыками преобразования компонент тензора при преобразованиях пространства и при переходе к криволинейной системе координат.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *Векторный и тензорный анализ* входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы бакалавриата по направлению 03.03.02 - Физика.

Курс векторного и тензорного анализа преподается на втором курсе после изучения курсов линейной алгебры и аналитической геометрии, параллельно с курсами математического анализа и дифференциальных уравнений. Это позволяет систематизировать полученные в этих курсах знания (понятия скаляра, вектора, переход от одной системы координат к другой, интегральные теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса, понятие потока вектора и циркуляции векторного поля и т.д.). Полученные ранее знания необходимы также для освоения новых понятий (тензоры, работа с индексами; умение работать в криволинейных координатах; дифференциальные операторы  $\text{rot}$ ,  $\text{div}$  и  $\text{grad}$ ; обобщенные интегральные теоремы и т.д.) и для получения навыков применения индексных форм записи к решению прикладных задач.

Полученные в результате освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» знания, умения и навыки необходимы при последующем изучении дисциплин «Линейные и нелинейные уравнения физики», «Электродинамика», «Квантовая теория», «Термодинамика», «Механика сплошных сред», а также для подготовки и написания выпускной квалификационной работы.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-2	Способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	<p>Знать: представление вектора в ко- и контравариантной форме и связь между ко- и контравариантными компонентами вектора; понятия тензора, ранга тензора; основные понятия тензорной алгебры (сложение, умножение, свертывание тензоров, симметрирование, альтернирование и др.); основные понятия теории поля; основные теоремы векторного и тензорного анализа и их физическую интерпретацию.</p> <p>Уметь: проводить операции над вектор-функциями (дифференцирование, интегрирование); преобразовать компоненты тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси; преобразовать компоненты тензора при переходе к криволинейным координатам; производить основные действия над тензорами и тензорными полями; применять аппарат тензорного исчисления для решения физических и механических задач.</p> <p>Владеть: аппаратом векторного и тензорного исчисления; навыками оперирования тензорами; навыками вычисления основных показателей тензорного и векторного полей.</p>

### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часа.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/ п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр.сам. раб.	Самост. работа	
<b>Модуль 1. Элементы векторной и тензорной алгебры</b>									
1	Элементы векторной алгебры	3	1-2	2	3			6	Устный опрос
2	Тензорная алгебра	3	3-6	4	4			10	Контрольная работа
<i>Итого по модулю 1</i>				<b>6</b>	<b>7</b>			<b>16</b>	Коллоквиум
<b>Модуль 2. Основы векторного и тензорного анализа</b>									
1	Основные определения и теоремы векторного и тензорного анализа	3	7-12	6	6			12	Лекционный диктант, проверочная работа
2	Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах	3	15-18	4	5			10	Контрольная работа
<i>Итого по модулю 2</i>				<b>10</b>	<b>11</b>			<b>22</b>	Коллоквиум
<b>ИТОГО</b>				<b>16</b>	<b>18</b>			<b>38</b>	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

### **ЛЕКЦИИ**

#### **Модуль 1. Элементы векторной и тензорной алгебры**

##### Тема 1. Элементы векторной алгебры

Скаляры. Векторы: определение, правилосложения. Проекция вектора на ось. Линейная зависимость векторов. Условие линейной независимости трех векторов. Разложение векторов. Векторный базис. Скалярное, векторное, смешанное, двойное векторное произведение векторов: определение, вычисления в декартовой системе координат. Преобразование ортов двух ортогональных базисов. Ортогональные преобразования. Ортогональные матрицы.

## Тема 2. Тензорная алгебра

Общее определение тензора. Закон преобразования при ортогональных преобразованиях систем координат. Ковариантность тензорных уравнений. Примеры. Алгебра тензоров: сложение, умножение, свертка тензоров. Симметричные и антисимметричные тензоры. Символ Кронекера. Признак тензорности величины. Собственные и несобственные ортогональные преобразования. Главные значения и главные направления тензора. Псевдотензоры. Псевдотензор Леви-Чивиты.

### ***Модуль 2. Основы векторного и тензорного анализа***

#### Тема 3. Основные определения и теоремы векторного и тензорного анализа

Скалярное и тензорное поля. Дифференцирование тензорного поля по координате. Производная по направлению и градиент. Векторные линии. Уравнение векторных линий. Поток векторного поля. Теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса для векторных полей и следствия. Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля. Оператор Гамильтона. Запись основных операций векторного дифференцирования в векторном виде с оператором  $\nabla$  и в декартовой системе координат. Запись основных операций векторного дифференцирования в тензорном виде. Векторные дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа. Основная теорема векторного анализа.

#### Тема 4. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Определение криволинейной системы координат. Коэффициенты Ламэ. Локальный базис. Цилиндрическая, сферическая системы координат. Градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа в криволинейных системах координат.

## ***ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ***

### ***Модуль 1. Элементы векторной и тензорной алгебры***

Тема 1. Элементы векторной алгебры. Решение задач векторной алгебры. Разложение вектора по базису. Вычисление работы силы, приложенной в точке. Различное представление вектора (ко- и контравариантные координаты вектора).

Тема 2. Тензорная алгебра. Сложение, умножение, свертывание тензоров. Поднятие/опускание индексов. Подстановка индексов. Симметрирование, альтернирование тензоров. Приведение тензора к главным осям. Вычисление инвариантов тензора. Вычисление компонент метрического тензора. Преобразование компонент тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси. Тензор в обобщенных координатах.

### ***Модуль 2. Основы векторного и тензорного анализа***

#### Тема 3. Основные определения и теоремы векторного и тензорного анализа



Дифференциальные операции и операторы: циркуляция векторного поля; производная по направлению, градиент скалярного поля (оператор «набла»); поток векторного поля; дивергенция векторного поля; вихрь векторного поля. Разложение непрерывного векторного поля на потенциальное и соленоидальное. Оператор Гамильтона. Запись основных операций векторного дифференцирования в тензорном виде. Векторные дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа. Основная теорема векторного анализа.

Тема 4. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Определение криволинейной системы координат. Коэффициенты Ламэ. Локальный базис. Цилиндрическая, сферическая системы координат. Градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа в криволинейных системах координат.

## **5. Образовательные технологии**

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. Отдельные лекции проводятся с использованием интерактивной доски.

Параллельно материал транслируется на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций). В процессе преподавания дисциплины применяются такие виды лекций, как вводная и обзорная лекции, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на физическом факультете имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

При изложении темы «Основные определения и теоремы векторного и тензорного анализа» целесообразно провести мастер-класс с приглашением экспертов по механике сплошных сред.

На кафедре имеются методические указания к выполнению самостоятельных и контрольных работ, в библиотеке ДГУ есть необходимая литература, имеются методические разработки, размещенные в Интернет сайте ДГУ.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведены примерные варианты самостоятельных работ. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебные пособия [1], [2], [4], [5] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

### 6.1. Планирование самостоятельной работы студентов

№	Модули и темы	Виды СРС	
		обязательные	дополнительные
<b>Модуль 1</b>			
1.	Элементы векторной алгебры	1. Работа с учебной литературой. 2. Выполнение домашнего задания 3. Проработка лекций	1. Выполнение индивидуального задания
2.	Тензорная алгебра	1. Работа с учебной литературой. 2. Выполнение домашнего задания 3. Проработка лекций	1. Выполнение индивидуального задания 2. Доклад-презентация
<b>Модуль 2</b>			
3.	Основные определения и теоремы векторного и тензорного анализа	1. Работа с учебной литературой. 2. Выполнение домашнего задания 3. Проработка лекций	1. Выполнение индивидуального задания 2. Доклад-презентация
4.	Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах	1. Работа с учебной литературой. 2. Выполнение домашнего задания 3. Проработка лекций	1. Выполнение индивидуального задания 2. Доклад-презентация

6.2. Примерные варианты самостоятельных работ по темам «Основные определения и теоремы векторного и тензорного анализа» и «Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах»

#### СР-1

1. Найти производную скалярного поля  $\varphi = xy^2z^3$  по направлению вектора  $\vec{s} = (1,1,1)$  в точке  $M(-1, \sqrt{3}, 1)$ .
2. Доказать потенциальность и найти потенциал векторного поля  $\vec{a} = z \cos(x+2y)\vec{i} + 2z \cos(x+2y)\vec{j} + \sin(x+2y)\vec{k}$ .
3. Доказать соленоидальность векторного поля и найти его векторный потенциал:  $\vec{a} = \sin(x-y)\vec{i} + xz\vec{j} - z \cos(x-y)\vec{k}$ .
4. Доказать формулу:  $\vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} = \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$ .
5. Вектор  $\vec{a}$  задан своими проекциями на оси цилиндрических координат:  $a_\rho = e^{z-\rho}(1-\rho)$ ,  $a_\varphi = 0$ ,  $a_z = \rho e^{z-\rho}$ .
  - а) Найти векторные линии поля  $\vec{a}$ .
  - б) Доказать потенциальность и найти потенциал  $\vec{a}$ .

## СР-2

1. Найти все точки, в которых градиент скалярного поля  $u = \frac{x+y}{z-x}$  перпендикулярен оси  $Oz$ .
2. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$  вдоль линии  $L: x^2 + y^2 = 4, z=1$ .
3. Доказать соленоидальность векторного поля и найти его векторный потенциал:  $\vec{a} = e^x yz\vec{i} - e^x zy^2 / 2\vec{j} + x^2 y^2\vec{k}$ .
4. Доказать формулу:  $\operatorname{div}(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ , где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – постоянные векторы.
5. Вектор  $\vec{a}$  задан своими проекциями на оси сферических координат:

$$a_r = e^r \cos \varphi, a_\theta = 0, a_\varphi = -\frac{e^r \sin \varphi}{r \sin \theta}.$$

- а) Найти векторные линии поля  $\vec{a}$ .
- б) Доказать потенциальность и найти потенциал  $\vec{a}$ .

## СР-3

1. Найти угол между градиентами поля  $u = xz - y^2$  в точках  $M\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$  и  $N(0, -1, 1)$ .
2. Доказать потенциальность и найти потенциал векторного поля  $\vec{a} = \frac{1}{y+z}\vec{i} - \frac{x-2}{(y+z)^2}\vec{j} - \frac{x-2}{(y+z)^2}\vec{k}$ .
3. Доказать соленоидальность векторного поля и найти его векторный потенциал:  $\vec{a} = (x - yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}$ .
4. Доказать формулу:  $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$ .
5. Вектор  $\vec{a}$  задан своими проекциями на оси цилиндрических координат:

$$a_\rho = 2\rho \operatorname{ctg} \varphi, a_\varphi = -\frac{\rho}{\sin^2 \varphi}, a_z = 0.$$

- а) Найти векторные линии поля  $\vec{a}$ .
- б) Доказать потенциальность и найти потенциал  $\vec{a}$ .

## СР-4

1. Найти производную скалярного поля  $\varphi = (x-z) \cos y$  по направлению вектора  $\vec{s} = (-1, 0, 1)$  в точке  $M(1, \pi, -1)$ .
2. Найти работу векторного поля  $\vec{r}$  вдоль линии  $L: x^2 + 4z^2 = 1, z \geq 0, y = 0$ .
3. Доказать соленоидальность векторного поля и найти его векторный потенциал:  $\vec{a} = \sin(x + y - z)\vec{i} + \sin(x + y - z)\vec{j} + 2\sin(x + y - z)\vec{k}$ .
4. Доказать формулу:  $\operatorname{div}(\vec{r} \cdot \vec{a}) = 4\vec{r} \cdot \vec{a}$ .
5. Вектор  $\vec{a}$  задан своими проекциями на оси сферических координат:

$$a_r = 0, a_\theta = -\frac{\cos(2\varphi - \theta)}{r}, a_\varphi = \frac{2 \cos(2\varphi - \theta)}{r \sin \theta}.$$

- а) Найти векторные линии поля  $\vec{a}$ .
- б) Доказать потенциальность и найти потенциал  $\vec{a}$ .

## СР-5

1. Найти все точки, в которых градиент скалярного поля  $u = x^2 + 2xy + 3xz - z^2$  параллелен оси  $Ox$ .
2. Доказать потенциальность и найти потенциал векторного поля  $\vec{a} = \frac{1}{y}\vec{i} - \frac{x-z}{y^2}\vec{j} - \frac{1}{y}\vec{k}$ .
3. Доказать соленоидальность векторного поля и найти его векторный потенциал:  $\vec{a} = \cos 2(x+y-z)\vec{i} + \cos 2(x+y-z)\vec{j} - 4\sin^2(x+y-z)\vec{k}$ .
4. Вычислить:  $\operatorname{div}(r^4\vec{r})$ .
5. Вектор  $\vec{a}$  задан своими проекциями на оси сферических координат:

$$a_r = \frac{1}{(1+r)\cos\theta}, a_\theta = \frac{\ln(1+r)\sin\theta}{r\cos^2\theta}, a_\varphi = 0.$$

- а) Найти векторные линии поля  $\vec{a}$ .
- б) Доказать потенциальность и найти потенциал  $\vec{a}$ .

### 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-2	<p>Знать: представление вектора в ко- и контравариантной форме и связь между ко- и контравариантными компонентами вектора; понятия тензора, ранга тензора; основные понятия тензорной алгебры (сложение, умножение, свертывание тензоров, симметрирование, альтернирование и др.); основные понятия теории поля; основные теоремы векторного и тензорного анализа и их физическую интерпретацию.</p> <p>Уметь: проводить операции над вектор-функциями (дифференцирование, интегрирование); преобразовать компоненты тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси; преобразовать компоненты тензора при переходе к криволинейным координатам; производить основные действия над тензорами и тензорными полями; применять аппарат тензорного исчисления.</p>	<p>Изучать темы дисциплины по лекциям, основной литературе [1], [4]; на практических занятиях решать задачи из задачников [5], [7], [9], самостоятельно приводить операторные уравнения к такому виду, чтобы их можно было решать итерационным методом, составлять программы для их приближенного решения.</p> <p>Подготовить рефераты, рекомендованные для самостоятельной работы по освоению модуля 1; выступать с докладами</p>

	ления для решения физических и механических задач. Владеть: аппаратом векторного и тензорного исчисления; навыками оперирования тензорами; навыками вычисления основных показателей тензорного и векторного полей.	
--	---	--

## 7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ОПК-2 «Способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О В Ы Й	Знать: представление вектора в ко- и контравариантной форме и связь между ко- и контравариантными компонентами вектора; понятия тензора, ранга тензора; основные понятия тензорной алгебры (сложение, умножение, свертывание тензоров, симметрирование, альтернирование и др.); основные понятия теории поля; основные теоремы векторного и тензорного анализа и их физическую интерпретацию. Уметь: проводить операции над вектор-функциями (дифференцирование, интегрирование); преобразовать компоненты	Знает точные формулировки основных теорем векторного и тензорного анализа; основные формулы и символику тензорного исчисления. Умеет формулировать некоторые теоремы математического анализа с точки зрения дифференциальных операций и свойств скалярных и векторных полей. Владеет навыками оперирования тензорами; навыками	Знает точные формулировки основных физических законов; точные формулировки основных теорем векторного и тензорного анализа; основные формулы тензорного исчисления в прямоугольной системе координат. Умеет формулировать некоторые теоремы математического анализа с точки зрения дифференциальных операций и свойств скалярных и векторных по-	Знает точные формулировки основных физических законов; точные формулировки основных теорем векторного и тензорного анализа; основные формулы тензорного исчисления в прямоугольной и криволинейной системах координат. Умеет формулировать некоторые теоремы математического анализа с точки зрения дифференциальных операций и свойств скалярных и векторных полей; строить

<p>тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси; преобразовать компоненты тензора при переходе к криволинейным координатам; производить основные действия над тензорами и тензорными полями; применять аппарат тензорного исчисления для решения физических и механических задач.</p> <p>Владеть: аппаратом векторного и тензорного исчисления; навыками оперирования тензорами; навыками вычисления основных показателей тензорного и векторного полей.</p>	<p>вычисления основных показателей тензорного и векторного полей.</p>	<p>лей; строить корректную математическую модель для описания физического процесса на основе свойств тензоров.</p> <p>Владеет навыками оперирования тензорами, вычисления основных показателей тензорного и векторного полей, применения теорем векторного анализа.</p>	<p>корректную математическую модель для описания физического процесса на основе свойств тензоров; проверять корректность простейшей математической модели.</p> <p>Владеет аппаратом векторного и тензорного исчисления; навыками оперирования тензорами; навыками вычисления основных показателей тензорного и векторного полей.</p>
--	---	---	--

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

### 7.3. Типовые контрольные задания

#### 7.3.1. Примерные задания для контрольной работы

1. Определить направление и величину наибольшего роста скалярного поля  $U = x^2 + 2xy^2 - z^3$ , в точке  $M_0(1, 1, 3)$ .
2. Показать, что векторы  $\vec{a} = \{-1; 4; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{0; 4; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{1; -2; 1\}$  образуют базис, и разложить вектор  $\vec{d} = \{3; 4; -5\}$  по этому базису.
3. Из векторов  $\vec{a} = \{6, -4, -5\}$ ,  $\vec{b} = \{3, 3, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{-1, -5, 1\}$  и  $\vec{d} = \{-4, 5, -2\}$  выделить аффинный базис и разложить по этому базису вектор  $\vec{r} = \{3, -3, 8\}$ .
4. Найти смешанное произведение векторов:  $\vec{a} = \{3, 4, 5\}$ ,  $\vec{b} = \{-3, 4, -2\}$ ,  $\vec{c} = \{1, 3, -1\}$  и определить объем параллелепипеда, построенного на векторах сомножителях.
5. Вычислить циркуляцию векторного поля: вдоль окружности, полученной пересечением сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  с плоскостью  $x + y + z = 0$ . Обход контура осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из точки  $M(1, 1, 0)$ .

6. Вычислить ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y}{x^2} \cdot \vec{j} - \frac{1}{x} \cdot \vec{k}$  в точке  $M_0(1, -1, 1)$ .
7. Разложить векторное поле на потенциальное и соленоидальное векторные поля, восстановить скалярный и векторный потенциалы поля:

$$\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (z^2 - x^2)\vec{j} + (yx - z)^2\vec{k}.$$

8. Найти потенциал центрального поля  $\vec{a} = \sin^2 |\vec{r}| \cdot \vec{r}/|\vec{r}|$ .
9. Проверить является ли поле соленоидальным или потенциальным:

$$(yx - z)\vec{i} + (z^2 - y^2)\vec{j} + (x + y)\vec{k}.$$

10. Разложить векторное поле по векторам основного базиса сферической системы координат  $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (z^2 - x^2)\vec{j} + (yx - z)\vec{k}$ .

11. Записать дивергенцию поля в цилиндрической системе координат:

$$\vec{a} = (yx - z)\vec{i} + (z^2 - y^2)\vec{j} + (x + y)\vec{k}.$$

12. Найти ротор векторного поля  $\vec{a} = (r - \cos \theta)^2 \vec{r}_r - \sin^2 \varphi \cdot \vec{r}_\theta + r^2 \vec{r}_\varphi$ .

13. Образовать скаляр путем свертывания тензора, матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

14. Найти вектор, образованный умножением тензора  $T_{ik}$  на вектор  $A_i$  с последующим свертыванием по индексу вектора и: 1) первому индексу тензора, 2) второму индексу тензора, если

$$((T_{ik})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

15. Дано:

$$((T_{ik})) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Разложить тензор  $T_{ik}$  на симметричный  $S_{ik}$  и антисимметричный  $K_{ik} = -K_{ki}$ . Найти:

- 1)  $T_{ik}A_k; T_{ik}A_i; T_{ik}A_iA_k;$
- 2)  $K_{ik}T_{ik}; K_{ik}S_{ik}; K_{ik}A_i; K_{ik}A_iA_k;$
- 3)  $T_{ik}\delta_{ik}; K_{ik}\delta_{ik}; S_{ik}\delta_{ik};$
- 4)  $T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}; \left(T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}\right)A_i; \left(T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}\right)A_iA_k.$

16. Показать, что если  $S_{ik}$  – симметричный тензор, а  $K_{ik}$  – антисимметричный, то  $S_{ik}K_{ik} = 0$ .

17. Найти главные значения и главные направления тензора

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 7.3.2 Примерные вопросы к зачету

1. Векторы и линейные операции над ними.
2. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.
3. Взаимные векторные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты вектора.
4. Связь между ко- и контравариантными компонентами вектора.
5. Выражение скалярного произведения через ко- и контравариантные компоненты. Выражение векторного произведения двух векторов в косоугольной системе координат. Углы Эйлера.
6. Понятие вектор-функции скалярного аргумента. Годограф вектор-функции. Производная вектор-функции, правила дифференцирования. Интегрирование вектор-функции.
7. Скалярные и векторные поля. Поверхности уровня. Векторные линии.
8. Производная по направлению, градиент скалярного поля.
9. Дифференцирование векторного поля по направлению.
10. Понятие циркуляции векторного поля.
11. Поток векторного поля.
12. Теорема Остроградского.
13. Ротор векторного поля.
14. Теорема Стокса.
15. Оператор Гамильтона и его применение.
16. Дифференциальные операции второго порядка.
17. Потенциальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля.
18. Соленоидальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля.
19. Лапласово векторное поле. Потенциал лапласова векторного поля.
20. Теорема о разложении непрерывного векторного поля на потенциальное и соленоидальное.
21. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе.
22. Понятие тензора. Ранг тензора. Свойство инвариантности.
23. Действия над тензорами.
24. Тензоры в криволинейных системах координат.
25. Метрический тензор.
26. Определение тензора произвольного порядка.
27. Преобразование компонент тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси.
28. Тензор в обобщенных координатах.



29. Понятие главной оси тензора. Приведение тензора к главным осям. Тензорный эллипсоид.
30. Понятие тензорной функции скалярного аргумента. Действия над тензорными полями.
31. Поток тензорного поля.
32. Дивергенция тензорного поля.
33. Дифференцирование тензорного поля по направлению.
34. Теорема Риччи о равенстве нулю ковариантной производной метрического тензора.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М., 1966.
2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., 1967.
3. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. – 343 с.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1965.
5. Краснов М. Л. Векторный анализ: задачи и примеры с подробными решениями : учеб.пособие/ М. Л. Краснов, А. И. Киселёв. - 2-е изд., испр. - Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 144 с.
6. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965. – 455 с.

### **б) дополнительная литература:**

1. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерных пространствах. – СПб.: Нестор, 2001. – 275 с.

2. Коренев Г.В. Тензорное исчисление: учеб.пособие для студентов вузов, обуч. по напр. и спец. "Математика", "Физика", "Механика"/ Г. В. Коренев. – Москва: МФТИ, 2000. - 240 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
5. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа. – СПб.: Изд-во политех. университета, 2008. – 109 с.

**9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru/>

**10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» является математической основой дисциплин, изучаемых на физическом факультете, использующих математические объекты тензорного характера (электричество и магнетизм, теоретическая механика, электродинамика, основы механики сплошных сред, квантовая механика и т.д.). Данный курс является также основой для большинства курсов специальной подготовки. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением прикладных задач из названных разделов физики. Эти задачи служат иллюстрацией эффективности символики и методов векторного и тензорного анализа.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, то следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Основы векторного и тензорного анализа» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить тему из математического анализа "Криволинейные и поверхностные интегралы".

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников:

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М., 1966.
2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., 1967.
3. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965.

Решать задачи и упражнения из учебных и учебно-методических пособий:

1. Краснов М. Л. Векторный анализ: задачи и примеры с подробными решениями : учеб.пособие/ М. Л. Краснов, А. И. Киселёв. - 2-е изд., испр. - Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 144 с.
2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1965.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Векторный и тензорный анализ»необходимы:

**Системное программное обеспечение:** ОСWindowsXP/7/8/10;

**Прикладное программное обеспечение:** MSOffice 2007/10/13;Maple.

**Сетевые приложения:** электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

#### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-35 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.