МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль подготовки

Информатика и компьютерные науки

Уровень высшего образования

бакалавриат

Форма обучения
очная

Статус дисциплины: **вариативная**

Махачкала 2017

Рабочая программа дисциплины « **Функциональный анализ**»
составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки
02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии (уровень подготовки: бакалавриат). Приказ № 224 от 12 марта 2015 г.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа,
Рагимханов В.Р., к. ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины одобрена:
на заседании кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа
от 28 марта 2017 г., протокол №3.
Зав. кафедрой ________________ Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от 30 марта 2017г., протокол № 6.
Председатель ________________ Меджидов З.Г.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «30» марта 2017г. ________________

Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с метрическими и нормированными пространствами, теорией операторов. Изучаемый материал применяется в задачах математической физики, в теории интегральных уравнений, в общей теории приближенных методов и т.д. Дисциплина «Функциональный анализ» необходимо изучать для овладения общими методами решения операторных уравнений и применения их при решении конкретных задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

профессиональных – ПК-1.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа*.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *4-х коллоквиумов (модулей)*, промежуточный контроль в форме *экзамена*.

Объем дисциплины 4 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

<table>
<tr><td rowspan="5">Семестр</td><td colspan="7">Учебные занятия</td><td rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Всего</td><td colspan="6">в том числе</td></tr>
<tr><td colspan="5">Контактная работа обучающихся с преподавателем</td><td rowspan="3">СРС, в том числе экзамен</td></tr>
<tr><td colspan="5">из них</td></tr>
<tr><td>Лекции</td><td>Лабораторные занятия</td><td>Практические занятия</td><td>КСР</td><td>Консультации</td></tr>
<tr><td>6</td><td>144</td><td>26</td><td></td><td>24</td><td></td><td></td><td>94</td><td>Экзамен</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

- ✓ овладение теорией метрических и нормированных пространств;
- ✓ ознакомление с фундаментальными свойствами основных функциональных пространств и операторов, действующих в них;
- ✓ творческое овладение общими методами исследования и решения операторных уравнений;
- ✓ ознакомление с прикладными аспектами функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина *Функциональный анализ* входит в вариативную часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы *бакалавриата* по направлению *02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии.*

Курс функционального анализа преподается на 3 курсе, после изучения математического анализа, дифференциальных уравнений, алгебры и геометрии. Функциональный анализ преподается параллельно с курсами «Уравнения в частных производных» и «Теория функций комплексного переменного». Это позволяет иллюстрировать свойства обратных операторов, сопряженных операторов, ограниченных и неограниченных операторов на конкретных примерах краевых задач для уравнений математической физики.

К учебным дисциплинам, так или иначе влияющим на качество получаемых знаний по данной дисциплине, относятся:

- Математический анализ – основная дисциплина для профессионального математика, изучающая предельные переходы в бесконечно малых и бесконечно больших величинах, дифференциальное и интегральное исчисление, для представления решений дифференциальных уравнений как пределы последовательностей или суммы бесконечных рядов.
- Геометрия и алгебра – позволяющая отработать навыки геометрического представления абстрактных метрических и топологических пространств, для успешного восприятия линейных вполне непрерывных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах.

Освоение данной дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин "Методы вычислений", "Вариационное исчисление".

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения.

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ПК-1	Способность собирать, обрабатывать и интерпрети-	Знать: общенаучные базовые понятия функционального анализа, опе-

	ровать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	раторных уравнений, в частности, интегральных уравнений. Уметь: грамотно применять аппарат функционального анализа для решения интегральных, дифференциальных и функциональных уравнений, а также в прикладных исследованиях, например, при изучении физических, экономических процессов и задач обработки информации. Владеть: аппаратом функционального анализа и методами решения операторных уравнений для постановки задач и осуществления математического моделирования различных объектов и явлений.

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часа.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
	Модуль 1. ***Линейные нормированные и гильбертовы пространства***								
1	Метрическое и линейное нормированное пространства. Банахово пространство.	6	1-2	4	4			10	*Устный опрос*
2	Гильбертовы пространства	6	3-4	4	2			8	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 1			***8***	***6***			***18***	*Коллоквиум*
	Модуль 2. ***Линейные операторы в линейных нормированных и гиль-***								

	бертовых пространствах								
1	Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство.	6	5-8	6	6			12	*Устный опрос*
2	Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве	6	9-10	4	4			8	*Контрольная работа*
	Итого по модулю 2			***10***	***10***			***20***	*Коллоквиум*
	Модуль 3. ***Вполне непрерывные операторы и их приложение***								
1	Понятие компактного множества и критерии компактности	6	11-12	4	4			6	*Устный опрос*
2	Вполне непрерывные операторы и их свойства	6	13	2	2			6	*Тестирование*
3	Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	6	14	2	2			8	
	Итого по модулю 3			***8***	***8***			***20***	*Коллоквиум*
	Модуль 4. ***Промежуточная аттестация***								
	Подготовка к экзамену							***36***	*Экзамен*
	ИТОГО			**26**	**24**			**94**	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (*разделам*).

Модуль 1. Линейные нормированные и гильбертовы пространства

Тема 1. Метрические и линейные нормированные пространства.

Метрическое и линейное нормированное пространства. Открытые и замкнутые множества. Сходимость. Сепарабельные и банаховы пространства. Лемма о вложенных шарах. Принцип сжимающих отображений. Теорема о пополнении. Критерий конечномерности ЛНП.

Тема 2. Гильбертово пространство.

Евклидово и гильбертово пространства. Неравенство Коши-Шварца. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Ряды Фуре по ортогональной системе.

Модуль 2. Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах

Тема 3. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах

Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора и функционала. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента оператора.

Тема 4. Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве

Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве. Спектр самосопряженного оператора.

Модуль 3. Вполне непрерывные операторы и их приложение

Тема 5. Понятие компактного множества и критерии компактности.

Компактные и предкомпактные множества. Теорема Хаусдорфа. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Теорема Арцела.

Тема 6. Вполне непрерывные операторы и их свойства.

Вполне непрерывные операторы. Свойства вполне непрерывных операторов. Спектр компактного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Тема 7. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. Отдельные лекции проводятся с использованием интерактивной доски.
Параллельно материал транслируется на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций). В процессе преподавания дисциплины применяются такие виды лекций, как вводная и обзорная лекции, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.
При изложении темы «Непрерывная обратимость линейных операторов» це-

лесообразно проведение мастер-класса с приглашением экспертов по дифференциальным и интегральным уравнениям.
На кафедре имеются методические указания к выполнению самостоятельных и контрольных работ, в библиотеке ДГУ есть необходимая литература, имеются методические разработки, размещенные в Интернет сайте ДГУ.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведены примерные варианты самостоятельных работ. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебно-методические пособия [9], [10], учебные пособия [1], [4], [5] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Линейные нормированные и метрические пространства»

СР-1

1. Доказать, что замыкание $[A]$ множества A есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.
2. Сходится ли в $C^1[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}$?
3. Доказать, что в $CL_1[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой $\|x\|=\int_0^1|x(t)|dt$ этого пространства.
4. Доказать, что любое конечное множество метрического пространства замкнуто.
5. Доказать, что равномерно ограниченное множество функций $M\subset C[a,b]$, удовлетворяющее условию Липшица с общей постоянной, компактно в $C[a,b]$.
6. Проверить, можно ли на вещественной прямой метрику задать равенством:
   a) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$; b) $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$; c) $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$.

СР-2

1. Доказать, что метрическое пространство, состоящее из иррациональных чисел отрезка $[0;1]$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$ сепарабельно.
2. Доказать, что совокупность внутренних точек $intA$ множества A есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A.
3. Сходится ли в $C[0,1]$ последовательность $y_n(t)=t^n-t^{2n},\ n=1,2,\ldots$?
4. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в себя имеет неподвижную точку.

5. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ n – мерных векторов можно ввести метрику формулой $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$. Будет ли $\mathbb{R}^n$ с этой метрикой полным метрическим пространством?
6. Доказать, что на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел метрику можно ввести формулой

$$\rho(n,m)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}, & n\neq m.\\ 0, & n=m.\end{cases}$$

Будет ли $(\mathbb{N},\rho)$ полным пространством?

СР-3

1. Доказать, что множество изолированных точек сепарабельного пространства не более чем счетное.
2. Банахово пространство X изоморфно линейному нормированному пространству Y. Доказать, что Y – банахово пространство.
3. Пусть $x_n(t)\in C[a,b]$, $n=1,2,\ldots$ – равностепенно непрерывное множество функций и $x_n(t)\to x_0(t)$, $n\to\infty$, для любого $t\in[a,b]$. Доказать, что $x_0(t)\in C[a,b]$.
4. Пусть L – подпространство гильбертова пространства H, $L\neq H$. Доказать, что существует $x\in H$ такой, что $x\perp L$.
5. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)\equiv 1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2, x_3(t)=t^3$ в пространстве $CL_2[-1,1]$.
6. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$|x(a)|\le k_1,\ \int_a^b |x'(t)|^2 dt\le k_2$$

($k_1\ge 0,\ k_2>0$ – константы**)** относительно компактно в $C[a,b]$.
7. Доказать, что всякое множество, предкомпактное в пространстве $C^1[a,b]$, является предкомпактным и в пространстве $C[a,b]$.

СР-4

1. Пусть h – произвольный элемент гильбертова пространства H. Доказать, что совокупность всех элементов $x\in H$, ортогональных к h, образует в H подпространство.
2. Доказать, что множество изолированных точек компактного множества конечное или счетное.
3. Сходится ли в $C[0,1]$ последовательность $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$?
4. Доказать, что если метрическое пространство вполне ограничено, то оно сепарабельно.
5. Пусть A – компактное множество в метрическом пространстве (X,ρ). Доказать, что для любого $x\in X$ существует $y\in A$ такой, что $\rho(x,A)=\rho(x,y)$.

6. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$, $p \geq 1$, при $p \neq 2$.
7. Доказать, что множество функций $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in R$, $\alpha \geq 0$ относительно компактно в $C[0,1]$.

СР-5

1. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ в пространстве $\tilde{L}_2[0,1]$.
2. Доказать, что если множество для любого $\varepsilon > 0$ имеет конечную -сеть в метрическом пространстве, то оно имеет конечную ε-сеть, состоящую из точек этого множества.
3. Доказать, что множество последовательностей $\{x_n(t)\}_1^\infty$ в пространстве l_2, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1$ является замкнутым, ограниченным, но не компактным.
4. Доказать, что множество последовательностей $\{x_n(t)\}_1^\infty \in l_2$, удовлетворяющих условию $x_1 = x_2$, образует подпространство в l_2.
5. Пусть A – компактное, B – замкнутое множества в метрическом пространстве (X, ρ). Доказать, что если $A \cap B = \acute{\emptyset}$, то $\rho(A, B) > 0$.
6. Доказать, что равномерно ограниченное множество многочленов степени не выше n компактно в $C[a, b]$.
7. Доказать, что всякая ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве не более чем счетная.

6.2. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	*Виды и содержание самостоятельной работы*
Модуль 1. Линейные нормированные и гильбертовы пространства	
1. Метрическое и линейное нормированное пространства. Банахово пространство.	Рефераты на темы: 1. Применение принципа сжимающих отображений к решению функциональных уравнений ([1], [2], [5]). 2. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений ([1], [2], [5]).
2. Гильбертовы пространства.	Доклады на темы: 1. Построение элемента наилучшего приближения элементами подпространства ([3], [5]).

	2. Разложение функций по ортогональным системам ([1], [2], [5]).
Модуль 2. Линейные операторы в линейных нормированных и гильбертовых пространствах	
1. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
2. Линейные операторы и линейные функционалы в гильбертовом пространстве.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
3. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	Доклад на тему: Некоторые применения интегральных уравнений Вольтерровского типа ([6], [9]).

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ПК-1	Знать: общенаучные базовые понятия функционального анализа, операторных уравнений, в частности, интегральных уравнений. Уметь: грамотно применять аппарат функционального анализа для решения интегральных, дифференциальных и функциональных уравнений, а также в прикладных исследованиях, например, при изучении физических, экономических процессов и задач обработки информации. Владеть: аппаратом функционального анализа и методами решения операторных уравнений для постановки задач и осуществления математического моделирования различных объектов и явлений.	Изучать темы дисциплины по лекциям, основной литературе [1], [4]; на практических занятиях решать задачи из задачников [5], [7], [9], самостоятельно приводить операторные уравнения к такому виду, чтобы их можно было решать итерационным методом, составлять программы для их приближенного решения. Подготовить рефераты, рекомендованные для самостоятельной работы по освоению модуля 1; выступать с докладами

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ПК-1 «Способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
пороговый	Знать: общенаучные базовые понятия функционального анализа, операторных уравнений, в частности, интегральных уравнений. Уметь: грамотно применять аппарат функционального анализа для решения интегральных, дифференциальных и функциональных уравнений, а также в прикладных исследованиях, например, при изучении физических, экономических процессов и задач обработки информации. Владеть: аппаратом функционального анализа и методами решения операторных уравнений для постановки задач и осуществления математического моделирования различных объектов и явлений.	Знает базовые понятия линейных нормированных Умеет находить нормы элементов и операторов. Владеет методами решения операторных уравнений в основных функциональных пространствах.	Знает базовые понятия линейных нормированных пространств и теории операторов. Умеет находить нормы элементов и операторов, может применять аппарат функционального анализа для решения интегральных, дифференциальных и функциональных уравнений. Владеет методами решения операторных уравнений и задач по математическому моделированию различных объектов и явлений.	Знает общенаучные базовые понятия функционального анализа, операторных уравнений. Умеет грамотно применять аппарат функционального анализа для решения интегральных, дифференциальных и функциональных уравнений, а также в прикладных исследованиях. Владеет аппаратом функционального анализа и методами решения операторных уравнений для постановки задач и осуществления математического моделирования различных объектов и явлений.

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

7.3. Типовые контрольные задания

7.3.1. Примерные темы рефератов:

1. Метрические пространства числовых последовательностей.
2. Теоремы о неподвижных точках и их применение.
3. Построение элементов наилучшего приближения в пространствах с интегральной метрикой.
4. Интегральные уравнения Фредгольма и методы их решения.
5. Интегральные уравнения Вольтерра и методы их решения.

7.3.2. Примерные варианты контрольных работ по теме «Линейные ограниченные операторы»

КР-1

1. Доказать формулу для нормы ограниченного линейного оператора $A: X \to Y,\ X, Y$ - ЛНП, $D(A) = X$: $\|A\| = \sup\limits_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$.
2. Доказать ограниченность линейного оператора $A: CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$ и найти его норму.
3. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$, $Ax(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + tx(t)$. Доказать, что A – непрерывно обратим.
4. Доказать, что функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k$, $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_1$, является линейным ограниченным, и найти его норму.
5. Доказать, что оператор $\Phi: L(X,Y) \to R,\ \Phi(A) = \|A\|$, непрерывен.
6. Пусть $A: X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $R(A) = Y$ и A^{-1} существует. Доказать, что $A^{-1} \in L(X,Y)$.
7. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A: L \to C[0,1]$,
$$Ax(t) = \frac{dx}{dt} + a(t)x(t),\ a(t) \in C[0,1].$$
Доказать, что A непрерывно обратим и найти A^{-1}.

КР-2

1. Пусть $A: l_2 \to l_1,\ Ax = x,\ D(A) = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Найти $D(A^*)$ и A^*.
2. Доказать, что функционал $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \dfrac{1}{k}) x_k$ ограничен и найти его норму.

3. Доказать, что сопряженное к нормированному пространству – банахово.
4. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)ds$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.
5. Пусть линейный функционал f определен на вещественном ЛНП X и неограничен. Доказать, что в любой окрестности нуля он принимает все вещественные значения.
6. Доказать, что ядро $KerA$ ограниченного линейного оператора $A: X \to Y$ является подпространством в X.
7. Доказать, что функционал $f(x) = \int_{-1}^{1} x(\frac{|t-1|}{2})dt$ является линейным непрерывным на $C[0,1]$ и найти его норму.
8. Пусть X – линейное пространство $A, B: X \to X$ – линейные операторы с $D_A = D_B = X$, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0, BA + A + I = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

КР-3

1. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) - \int_0^1 e^{t+s} x(s)ds$ непрерывно обратим, и найти A^{-1}.
2. Пусть L – подпространство гильбертова пространства H, $P: H \to L$, $Px = u$, где $x = u + v, u \in L, v \in L^{\perp}$. Доказать, что P ограничен и найти его норму.
3. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$ с областью определения D_A – линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$, непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.
4. Доказать, что функционал $f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$, $x \in L_2[0,1]$, является линейным непрерывным и найти его норму.
5. Доказать ограниченность и найти норму оператора $A: CL_2[0,1] \to CL_2[0,1]$,
$$Ax(t) = \begin{cases} x(t) \text{ при } t \le \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ при } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$
6. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A_n \in L(X,Y)$ $(n \in N)$ и для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ фундаментальна. Доказать, что существует такой оператор $A \in L(X,Y)$, что $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно.
7. Пусть X, Y – линейные пространства, $A: X \to Y$ - линейный оператор, у которого существует обратный. Доказать, что системы элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in D_A$, одновременно или линейно независимы или линейно зависимы.
8. Доказать, что область значений линейного оператора является линейным многообразием.

КР-4

1. Пусть $A, B \in L[X,Y]$ – ненулевые операторы и $R_A \cap R_B = 0$. Доказать, что A, B линейно независимы.
2. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$ является линейным ограниченным и найти его норму.
3. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - x(t)$, $D(A) = \{x(t): \frac{dx}{dt} \in C[0,1], x(0) = x'(0) = 0\}$. Доказать, что А непрерывно обратим, и найти A^{-1}.
4. Доказать, что оператор $\Phi: L(X,Y) \to R$, $\Phi(A) = \|A\|$, непрерывен.
5. Доказать, что функционал $f: l_1 \to R$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{k})x_k$ ограничен и найти его норму.
6. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) - \int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$ непрерывно обратим и найти A^{-1}.Пусть X – линейное нормированное пространство, $A: X \to X$ – линейный оператор и в X существует такая последовательность $x_n \in D_A$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что у оператора A не существует ограниченного обратного.
8. Пусть $A, A_n: C[0,1] \in C[0,1]$,
$$Ax(t) = \int_0^1 e^{ts}x(s)ds, \quad A_n x(t) = \int_0^1 [\sum_{k=0}^{n} \frac{(st)^k}{k!}]x(s)ds.$$
Доказать, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ равномерно.

КР-5

1. Доказать, что функционал $f(x) = \int_{-1}^{1} x(\frac{|t-1|}{2})dt$ является линейным непрерывным на $C[0,1]$ и найти его норму.
2. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$ с областью определения D_A – линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$, является неограниченным линейным оператором.Пусть H – гильбертово пространство, $F: H \to R$ – функционал, действующий по формуле $F(x) = (x, a)$, где a – фиксированный вектор. Доказать, что F линеен и непрерывен и найти его норму.
4. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$. Доказать, что A непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.
5. Пусть X, Y – линейные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор, у которого существует обратный. Доказать, что системы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D_A$, одновременно или линейно независимы или линейно зависимы.

6. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, действующий по формуле $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, λ_n – вещественные числа ($n = 1,2,\ldots$) такие, что $\sup_{n\geq 1}|\lambda_n| < +\infty$. Доказать, что A – линейный ограниченный оператор и найти его норму.
7. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $x_n, x \in X$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$, A_n, $A \in L(X,Y)$, причем $A_n \to A$ равномерно. Доказать, что $A_n x_n \to Ax$, $n \to \infty$.
8. Доказать, что оператор $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds$, вполне непрерывен.

7.3.3. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу «Линейные ограниченные операторы и функционалы. Сопряженное пространство»

1. Линейные ограниченные операторы и функционалы.
2. Формулы для нормы оператора и функционала.
3. Линейные ограниченные операторы и функционалы в конечномерном пространстве.
4. Линейные ограниченные операторы и функционалы в пространстве непрерывных функций.
5. Линейные ограниченные операторы и функционалы в пространстве числовых последовательностей.
6. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота.
7. Два вида сходимости в пространстве линейных ограниченных операторов.
8. Принцип равномерной ограниченности линейных операторов.
9. Будет ли линейный функционал $f(x) = x'\left(\frac{1}{2}\right)$, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0;1]$, ограниченным? Если да, то найти его норму.
10. Доказать, что если линейный оператор $A: X \to X$ не является ограниченным в одной из двух эквивалентных норм, то он не будет ограниченным и в другой норме.
11. Доказать, что всякий линейный оператор, заданный на конечномерном пространстве, ограничен.
12. Сопряженное пространство. Два вида сходимости последовательности непрерывных линейных функционалов.
13. Слабая ограниченность и слабая сходимость.
14. Теорема Хана-Банаха. Следствия.
1. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора.
2. Теорема Банаха об обратном операторе.
3. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
15. Доказать, что в конечномерном пространстве всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

16. Исследовать на сходимость последовательность операторов $A_n: l_2 \to l_2$, $A_n x = A_n(x_1, x_2, \dots) = (0,0, \dots, x_n, 0,0, \dots)$.
17. Доказать, что оператор $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$, является линейным ограниченным и найти его норму.

7.3.4. Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра"

1. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
2. Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции.
3. Компактность интегральных операторов с вырожденным и непрерывным ядрами.
4. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
5. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным и симметричным ядром.
6. Решение интегральных уравнений Вольтерра с вырожденным и симметричным ядром.
7. В пространстве $C[-1;1]$ решить интегральное уравнение
$$x(t) + \int_{-1}^{1} e^{s+2t} x(s)ds = e^t.$$
8. В пространстве $C[0;1]$ решить интегральное уравнение
$$x(t) = \int_0^1 \sin \pi(t-s)\, x(s)ds + \cos \pi t.$$

7.3.5. Примерные вопросы к экзамену по дисциплине

1. Метрическое и линейное нормированное пространства. Примеры: $\mathbb{R}^n, C[a;b], CL_p[a;b], l_p, C^k[a;b]$.
2. Открытые и замкнутые множества. Сходимость в основных функциональных пространствах.
3. Банаховы пространства. Лемма о вложенных шарах.
4. Теорема Бэра о категориях.
5. Принцип сжимающих отображений и его применение.
6. Теорема о пополнении.
7. Гильбертово пространство. Примеры. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве.
8. Практический способ построения элемента наилучшего приближения элементами подпространства.
9. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
10. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
11. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

12. Компактность и сепарабельность в ЛНП. Критерий конечномерности ЛНП.
13. Равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные семейства непрерывных функций. Теорема Арцела.
14. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора и функционала.
15. Сопряженное пространство. Два вида сходимости последовательности непрерывных линейных функционалов.
16. Слабая ограниченность и слабая сходимость.
17. Теорема Хана-Банаха.
18. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве.
19. Обратный оператор. Непрерывная обратимость линейного оператора.
20. Теорема Банаха об обратном операторе.
21. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
22. Компактные операторы. Спектр компактного оператора.
23. Теоремы Фредгольма в гильбертовом пространстве.
24. Спектр самосопряженного оператора.
25. Интегральные уравнения второго рода. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции.
26. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным и симметричным ядрами.
27. Компактность интегральных операторов с непрерывным ядром.
28. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
29. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода с вырожденным и симметричным ядрами.

7.3.6. Примерные задания тестов

Тест №1

1. Выберите верное утверждение:

А) Если $\boldsymbol{A}$ – сжимающее отображение, то уравнение $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ имеет единственное решение.

Б) В полном метрическом пространстве уравнение $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ имеет единственное решение.

В) Сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет только одну неподвижную точку.

2. В конечномерном метрическом пространстве множество предкомпактно. Тогда оно…

А) Замкнуто.

Б) Ограничено.

В) Открыто.

Г) Всюду плотно.

3. Для каких из следующих множеств в $\mathbb{R}$ существует конечная 1-сеть:

А) $[-\mathbf{5}, \infty)$;

Б) $(\mathbf{7}, \mathbf{25}]$;

В) $\mathbb{N}$.

4. Каким из перечисленных свойств операция сопряжения не обладает:

А) $(\boldsymbol{3A})^* = \boldsymbol{3A}^*$;

Б) $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{B}^*$;

В) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.

5. Если $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\delta}(\mathbf{H})$ то

А) $\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}} + \boldsymbol{E} \geq \mathbf{0}$;

Б) $\mathbf{3}\boldsymbol{A} - \mathbf{5}\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{H})$;

В) $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}\ (\boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Ax})$.

6. Для того чтобы линейный оператор был взаимно однозначен, необходимо и достаточно, чтобы:

А) его ядро состояло только из нулевого элемента;

Б) его ядро было пустым множеством;

В) его ядро было линейным многообразием.

7. Оператор $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ непрерывно обратим. Тогда неверно

А) $\exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}: \forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Ax} \neq \boldsymbol{y}$;

Б) $\mathrm{A}^{-\mathbf{1}}$ ограничен;

В) А взаимно однозначен.

8. Какая из следующих функций является решением интегрального уравнения $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{6}\int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{tsx}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds} - \mathbf{2}$:

А) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t} - \mathbf{2}$;

Б) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = -\mathbf{2}$;

В) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}/\mathbf{3} - \mathbf{2}$.

Тест №2

1. Одна из аксиом скалярного произведения имеет вид…

А) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

Б) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

В) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$.

2. Множество называется открытым, если…

А) Все его точки - внутренние.

Б) Оно содержит все свои внутренние точки.

В) Если оно не замкнуто.

3. Какая из приведенных ниже функций не будет элементом пространства $\boldsymbol{C}[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$:

А) $\mathbf{tg}(\boldsymbol{t})$;

Б) $(\mathbf{2}^{\boldsymbol{t}}+\mathbf{1})/\boldsymbol{t}$;

В) $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{t}+\mathbf{2}|$;

Г) $\boldsymbol{ch}^{\mathbf{2}}(\mathbf{2}\boldsymbol{t})$.

4. В гильбертовом пространстве для любых $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ выражение $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\mathbf{2}} - \|\boldsymbol{x}\|^{\mathbf{2}}$ равно…

А) $-\|\boldsymbol{y}\|$;

Б) 0;

В) $\|\mathbf{y}\|^{\mathbf{2}}$.

5. Какое из следующих утверждений неверно:

А) В любой окрестности предельной точки множества содержится бесконечно много точек этого множества.

Б) В любой окрестности предельной точки множества содержится хотя бы одна точка этого множества.

В) Если $\boldsymbol{x}$ – предельная точка множества, то найдется последовательность элементов этого множества, сходящаяся к $\boldsymbol{x}$.

Г) Любая предельная точка множества является элементом этого множества.

6. Линейное пространство будет бесконечномерным если в нем …

А) Существует счетный ортонормированный базис.

Б) Любая система из конечного числа элементов линейно независима.

В) Существует линейно независимая система с любым наперед заданным числом элементов.

7.Оператор $\boldsymbol{A}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ не является непрерывным в точке $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$, если…

А) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta\ > 0\ \forall x \in\ X\colon \|x-a\| < \delta \Longrightarrow\ \|Ax-Aa\| \ge \varepsilon$;
Б)) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ > 0\ \forall x \in\ X\colon \|x-a\| < \delta \Longrightarrow\ \|Ax-Aa\| \ge \varepsilon$;
В) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta\ > 0\ \exists x \in\ X\colon \|x-a\| < \delta \Longrightarrow\ \|Ax-Aa\| \ge \varepsilon$;

Г) $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists \boldsymbol{\delta}\ > 0\ \exists \boldsymbol{x} \in\ \boldsymbol{X}\colon\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow\ \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{Aa}\| \ge \boldsymbol{\varepsilon}$.

8. Среди следующих операторов выберите нелинейные:

А) $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{C}[-2; 1] \to \boldsymbol{C}[-2; 1]$, $\boldsymbol{Ax(t)} = \int_{-2}^{1} \sin s\, x(s) ds - 3x(0)$;

Б) $\boldsymbol{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{Ax} = (0, x_1, 2x_2), x = (x_1, x_2)$;

В) $\boldsymbol{C}[0; 1] \to \boldsymbol{C}[0; 1]$, $\boldsymbol{Ax(t)} = x(t^4)$;

Г) $\boldsymbol{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Ax} = 1 - x_1 - 6x_2$, где $x = (x_1, x_2)$.

9. Норма оператора $\boldsymbol{Ax} = 4x_1 - 3x_3, x \in \mathbb{R}^4$ равна

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 7.

10. Последовательность элементов пространства $\boldsymbol{L(X, Y)}$, сходящаяся по норме этого пространства, называется

А) сильно сходящейся;

Б) слабо сходящейся;

В) равномерно сходящейся;

Г) поточечно сходящейся.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
2. Константинов Р.В. Лекции по функциональному анализу. Долгопрудный, 2007.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
4. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

б) дополнительная литература:

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Наука, 1984.
7. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. М.: URSS, 2010.
8. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций действительного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1997.
9. Меджидов З.Г. Методические указания и задачи по курсу "Интегральные уравнения". Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.
10. Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р. К. Функциональный анализ. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2010.
11. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
12. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 2004.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

13.2319 http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Дисциплина «Функциональный анализ» является основной базой всех математических дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач из разных разделов высшей математики. Эти задачи служат иллюстрацией отдельных понятий, теорем и методов функционального анализа.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоретического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Линейные нормированные и гильбертовы пространства» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы "Векторы и операции над ними", «Модуль комплексного числа и его свойства».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Решать задачи и упражнения из учебных и учебно-методических пособий:

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.;
2. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. М.: URSS, 2010;
3. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций действительного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1997.
4. Меджидов З.Г. Методические указания и задачи по курсу "Интегральные уравнения". Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Функциональный анализ» необходимы:
Системное программное обеспечение: ОС Windows XP/7/8/10;
Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/10/13;
Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-35 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.